2

PROCESE ALEATOARE DISCRETE ÎN TIMP

2.1 PROPRIETĂŢI GENERALE

2.1.1 Medii statistice. Clasificări

Un proces aleator discret poate fi definit ca o secvenţă de variabile aleatoare $x(n)$, indexată cu variabila temporală n. Evident, $x(n)$, privit ca o variabilă aleatoare, poate fi caracterizat prin funcţia densitate de probabilitate, care va fi în general o funcţie de timp, $w_{x(n)}(x)$. În consecinţă, valorile medii sunt şi ele dependente şi de variabila temporală n. De exemplu, valoarea medie va scrie

$$m_x(n) = \mathrm{E}\{x(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_{x(n)}(x) \mathrm{d}\, x \tag{2.1}$$

iar funcţiile de corelaţie şi covarianţă vor depinde de două variabile temporale,

$$r_{xy}(k,l) = \mathrm{E}\{x(k)y^*(l)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy^* w_{x(k)y(l)}(x,y) \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \tag{2.2}$$

$$c_{xy}(k,l) = \mathrm{E}\{(x(k)-m_x(k))(y(l)-m_y(l))^*\} = r_{xy}(k,l) - m_x(k)m_y^*(l) \tag{2.3}$$

În cazul când $x(k)$ şi $y(l)$ sunt două variabile aleatoare *statistic independente*, deci

$$w_{x(k)y(l)}(x,y) = w_{x(k)}(x) w_{y(l)}(y) \tag{2.4}$$

rezultă imediat că

$$r_{xy}(k,l) = m_x(k)m_y^*(l) \tag{2.5}$$

şi în consecinţă

$$c_{xy}(k,l) = 0 \tag{2.6}$$

Dacă este îndeplinită ultima relaţie, se spune că $x(k)$ şi $y(l)$ sunt *necorelate*. Se observă că dacă două semnale sunt statistic independente, ele sunt şi necorelate. Reciproca nu este în general adevărată. Ea are totuşi loc în cazul proceselor gaussiene, unde cele două noţiuni sunt echivalente.

Se spune că $x(k)$şi $y(l)$sunt *ortogonale*, dacă

$$r_{xy}(k,l) = \mathrm{E}\left\{x(k)y^*(l)\right\} = 0 \tag{2.7}$$

În cazul particular x=y, se obţin funcţiile de autocorelaţie

$$r_{xx}(k,l) = \mathrm{E}\left\{x(k)x^*(l)\right\} \tag{2.8}$$

şi autocovarianţă,

$$c_{xx}(k,l) = \mathrm{E}\left\{(x(k) - m_x(k))(x(l) - m_x(l))^*\right\} = r_{xx}(k,l) - m_x(k)m_x^*(l) \tag{2.9}$$

Se poate uşor demonstra că:

- Dacă $x(k)$şi $y(l)$sunt variabile aleatoare ortogonale, funcţia de autocorelaţie a sumei este egală cu suma funcţiilor de autocorelaţie,

$$r_{x+y,x+y}(k,l) = r_{xx}(k,l) + r_{yy}(k,l) \tag{2.10}$$

- Dacă $x(k)$şi $y(l)$sunt variabile aleatoare necorelate, autocovarianţa sumei este egală cu suma autocovarianţelor,

$$c_{x+y,x+y}(k,l) = c_{xx}(k,l) + c_{yy}(k,l) \tag{2.11}$$

Proces aleator staţionar

Dacă proprietăţile statistice sunt independente de timp se zice că procesul este staţionar.

De exemplu, dacă densitatea de probabilitate de ordinul 1, $w_{x(n)}(x) = w_x(x)$ nu depinde de n, rezultă că media $m_x(n) = m_x$ nu depinde de n. Se spune în acest caz că procesul este *staţionar de ordinul 1* sau *staţionar în medie*.

Dacă în plus, densitatea de probabilitate de ordinul 2, satisface condiţia

$$w_{x(k)x(l)}(x_1, x_2) = w_{x(k+n)x(l+n)}(x_1, x_2) \tag{2.12}$$

pentru orice n întreg, se spune că procesul este *staţionar de ordinul doi*. In acest caz funcţia de autocorelaţie va fi

$$r_{xx}(k,l) = r_{xx}(k+n, l+n) \qquad (\forall)n \in \mathbb{Z} \tag{2.13}$$

sau luând n=-l,

$$r_{xx}(k,l) = r_{xx}(k-l, 0) = r_{xx}(k-l) \tag{2.14}$$

deci funcţia de autocorelaţie depinde numai de diferenţa momentelor de timp k-l.

În fine, dacă proprietatea de mai sus poate fi extinsă pentru densităţile de probabilitate de orice ordin, se spune că procesul este *staţionar în sens strict*.

Deoarece frecvent interesează numai mediile de ordin 1 şi 2, este utilă noţiunea de proces aleator *staţionar în sens larg*, definit ca un proces pentru care:

- $m_x(n) = m_x$ constant;
- $r_{xx}(k,l) = r_{xx}(k-l)$ depinde numai de diferenţa momentelor de timp;
- $c_{xx}(0) < \infty$ (este finit).

Deoarece condiţiile acestea se pun numai asupra momentelor, ele sunt mai slabe decât cele impuse asupra densităţilor de probabilitate.

Proprietăţi ale funcţiilor de corelaţie pentru procese aleatoare staţionare în sens larg.

Pentru această categorie de procese aleatoare sunt evidente următoarele relaţii:

$$r_{xy}(k)=\mathrm{E}\left\{x(n+k)y^{*}(n)\right\}=\mathrm{E}\left\{x(n)y^{*}(n-k)\right\} \tag{2.15}$$

$$r_{xx}(k)=\mathrm{E}\left\{x(n+k)x^{*}(n)\right\}=\mathrm{E}\left\{x(n)x^{*}(n-k)\right\} \tag{2.16}$$

$$r_{yx}(k)=\mathrm{E}\left\{y(n+k)x^{*}(n)\right\}=\mathrm{E}\left\{x(n)y^{*}(n+k)\right\}^{*}=r_{xy}^{*}(-k) \tag{2.17}$$

În particular

$$r_{xx}(k)=r_{xx}^{*}(-k) \tag{2.18}$$

deci *secvenţa de autocorelaţie este conjugat simetrică*.
Având în vedere că

$$c_{xy}(k)=r_{xy}(k)-m_x m_y^{*} \tag{2.19}$$

rezultă de asemenea

$$c_{yx}(k)=c_{xy}^{*}(-k) \tag{2.20}$$

deci, în particular, şi funcţia de autocovarianţă este conjugat simetrică, şi

$$c_{xx}(k)=r_{xx}(k)-\left|m_x\right|^2 \tag{2.21}$$

În fine, valoarea din origine a funcţiei de autocorelaţie,

$$r_{xx}(0)=\mathrm{E}\left\{\left|x(n)\right|^2\right\} \tag{2.22}$$

reprezintă *valoarea medie pătratică* a procesului aleator $x(n)$. Se poate demonstra că *modulul funcţiei de autocorelaţie îşi atinge maximul în origine*,

$$\left|r_{xx}(n)\right|<r_{xx}(0),\quad n\neq 0 \tag{2.23}$$

Valoarea în origine a funcţiei de autocovarianţă este numită *varianţă*

$$\mathrm{var}\{x\}=c_{xx}(0)=\sigma_x^2=r_{xx}(0)-\left|m_x\right|^2 \tag{2.24}$$

unde σ_x este *dispersia*.

2.1.2 Medii temporale. Ergodicitate

Valorile medii prezentate până aici sunt medii statistice, pe ansamblul tuturor realizărilor posibile. Deşi sunt foarte utile pentru multe aplicaţii, frecvent ele nu sunt cunoscute. Se pune problema de a estima aceste valori medii pornind de la cunoaşterea eşantioanelor succesive ale unei singure realizări particulare a procesului aleator.

Dacă se cunosc $2N+1$ eşantioane ale unei realizări particulare, se poate evalua media aritmetică a acestora,

$$\hat{m}_x(N)=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n) \tag{2.25}$$

Se pune problema în ce măsură cantitatea de mai sus tinde către media statistică $\mathrm{E}\{x(n)\}$, atunci când N creşte. Evident problema are sens numai dacă procesul este staţionar în medie (deci dacă media statistică este constantă).

Se spune că $m_x(N)$ tinde către m_x în medie pătratică dacă

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{E}\left\{\left|\hat{m}_x(N)-m_x\right|^2\right\}=0 \tag{2.26}$$

Un proces care satisface relaţia de mai sus se zice că este *ergodic în medie* şi vom scrie că:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{m}_x(N) = m_x = \mathrm{E}\{x(n)\} \tag{2.27}$$

Se poate demonstra că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un proces staţionar în sens larg să fie ergodic în medie este

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} c_{xx}(n) = 0 \tag{2.28}$$

Ideea de estimare temporală se poate extinde şi asupra altor medii. Pentru funcţia de autocorelaţie, putem porni de la secvenţa

$$y_k(n) = x(n+k)x^*(n) \tag{2.29}$$

Introducem estimatorul:

$$\hat{r}_{xx}(k,N) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} y_k(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n+k)x^*(n) \tag{2.30}$$

Dacă acesta converge în medie pătratică spre $r_x(k)$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left\{\left|\hat{r}_{xx}(k,N) - r_{xx}(k)\right|^2\right\} = 0 \tag{2.31}$$

se spune că procesul este *ergodic în autocorelaţie* şi se scrie

$$\lim_{N\to\infty} \hat{r}_{xx}(k,N) = r_{xx}(k) \tag{2.32}$$

În particular, pentru un asemenea proces putem scrie:

$$r_{xx}(0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \tag{2.33}$$

Această expresie reprezintă însă *puterea medie a semnalului*, deci rezultă valabilitatea afirmaţiei:

Funcţia de autocorelaţie evaluată în origine este egală cu puterea medie a semnalului.

Relaţia

$$r_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |m_x|^2 \tag{2.34}$$

pune în evidenţă două componente ale acestei puteri; prima, dată de varianţa semnalului, se referă la componentele variabile ale semnalului, în timp ce ultima, este datorată valorii medii.

Vom accepta în general faptul că

$$\lim_{n\to\infty} c_{xx}(n) = 0 \tag{2.35}$$

Aceasta corespunde ipotezei naturale că două eşantioane luate la momente de timp foarte depărtate devin practic necorelate. Se poate demonstra că această condiţie are drept urmare faptul că procesul aleator este ergodic în medie.

2.1.3 Proprietăţi spectrale

Vom introduce transformata Z a funcţiei de autocovarianţă.

$$Z\{c_{xx}(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}(n) z^{-n} \mathrel{\hat{=}} P_{xx}(z)$$
$$c_{xx}(n) = Z^{-1}\{P_{xx}(z)\}(n) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \oint_C P_{xx}(z) z^{n-1}\,\mathrm{d}\,z \tag{2.36}$$

unde C este un cerc inclus în domeniul de convergenţă al lui $P_{xx}(z)$.
S-a văzut că $c_{xx}(n)=c^*_{xx}(-n)$, astfel încât :

$$P_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^*_{xx}(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^*_{xx}(n) z^{n} = P^*_{xx}\left(\frac{1}{z^*}\right) \tag{2.37}$$

În particular, în cazul unui semnal real,

$$P_{xx}(z) = P_{xx}\left(z^{-1}\right). \tag{2.38}$$

În consecinţă, domeniul de convergenţă este de forma $R_- < |z| < R_+$, iar relaţia de mai sus conduce la $R_+=1/R_-$.

Aceasta înseamnă că dacă domeniul de convergenţă este nevid, $R_-<1$, $R_+>1$, deci cercul $|z|=1$ este inclus în domeniul de convergenţă. Trecând deci pe cercul $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$, se obţin *relaţiile Wiener-Hincin*:

$$c_{xx}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\,\mathrm{d}\,\omega = \mathrm{TFTDI}\left\{P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right\}(n)$$
$$P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} = \mathrm{TFTD}\{c_{xx}(n)\}(\omega) \tag{2.39}$$

unde s-au notat cu TFTD şi TFTDI transformatele Fourier în timp discret directă şi inversă. Pentru $n=0$,

$$c_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \mathrm{d}\,\omega \tag{2.40}$$

relaţie ce justifică numele de *densitate spectrală de putere* dat funcţiei $P_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ pentru semnale cu valoare medie nulă, deoarece în acest caz

$$c_{xx}(0) = r_{xx}(0) = \mathrm{E}\left\{|x(n)|^2\right\} \tag{2.41}$$

reprezintă puterea medie a semnalului.

În concluzie:

- Secvenţa de autocovarianţă şi funcţia densitate spectrală de putere reprezintă o pereche de transformate Fourier.
- Această proprietate se extinde şi asupra funcţiei de autocorelaţie pentru semnale cu valoare medie nulă. Acesta este şi motivul pentru care în multe lucrări se întâlneşte afirmaţia că funcţia de autocorelaţie şi densitatea spectrală de putere formează o pereche de transformate Fourier. Se remarcă însă că dacă valoarea medie nu este nulă, transformata Z a funcţiei de autocorelaţie are domeniul de convergenţă vid, iar transformata Fourier conţine un impuls delta în origine.
- Funcţia densitate spectrală de putere este o funcţie reală de ω, după cum rezultă din relaţia (2.37). În plus, din (2.38) rezultă că densitatea spectrală de putere a unui semnal real este o funcţie pară de ω.

- Puterea medie a unui semnal se poate evalua cu

$$\mathrm{E}\left\{|x(n)|^2\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{d}\,\omega = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_C P_{xx}(z) z^{-1}\,\mathrm{d}\,z \tag{2.42}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \,\|z| = 1\}$$

- Urmând un procedeu analog celui prezentat mai înainte, se poate introduce şi o funcţie *densitate de putere de interacţiune* a două procese, definită ca transformată Z a secvenţei $c_{xy}(n)$.

Aplicaţia 1

Zgomotul alb se poate defini prin

$$r_{xx}(k) = \sigma_x^2 \delta(k) \tag{2.43}$$

Vom presupune în plus că valoarea medie este nulă, aşa încât varianţa

$$r_{xx}(0) = c_{xx}(0) = \sigma_x^2 \tag{2.44}$$

reprezintă puterea medie. Conform relaţiilor de mai sus, zgomotul alb se caracterizează prin aceea că două eşantioane diferite sunt necorelate. Pe de altă parte, densitatea spectrală de putere este

$$P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} = \sigma_x^2 \tag{2.45}$$

constantă, ceea ce justifică denumirea de zgomot alb şi poate constitui o definiţie echivalentă cu precedenta. Aparent, ar exista o contradicţie între faptul că σ_x^2 reprezintă puterea şi în acelaşi timp şi densitatea de putere. Aceasta provine din faptul că se utilizează frecvenţe normate, deci

$$P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = \sigma_x^2 \quad \text{pentru} \quad \omega \in [0, 2\pi] \tag{2.46}$$

In frecvenţe nenormate, densitatea spectrală de putere se exprimă prin

$$P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) = \frac{\sigma_x^2}{F_s} \quad \text{pentru} \quad \Omega \in [0,\, 2\pi F_s] \tag{2.47}$$

Aplicaţia 2

Fie un proces aleator staţionar discret caracterizat prin

$$\mathrm{E}\{x(n)\} = 0, \quad r_{xx}(k) = \alpha^{|k|}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Să evaluăm şi să reprezentăm, ca funcţie de ω, densitatea spectrală de putere.

$$P_{xx}(z) = Z\{r_{xx}(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\alpha z)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha z)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^k$$

Prima din cele doua progresii geometrice este convergentă dacă:

$$|\alpha z| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| < \frac{1}{\alpha}$$

iar a doua, dacă

$$\left|\alpha z^{-1}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > \alpha$$

Rezultă domeniul comun de convergenţă,

$$\alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

nevid dacă $0<\alpha<1$, în care

$$P_{xx}(z) = \alpha z \frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})}$$

Deoarece domeniul de convergenţă include cercul $|z|$=1, are sens

$$P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1-\alpha^2}{\left(1-\alpha\, e^{j\omega}\right)\left(1-\alpha\, e^{-j\omega}\right)} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}$$

In figura 2.1 este reprezentată funcţia de autocorelaţie pentru α=0,5 (cu linie plină) şi α=0,9 (cu linie punctată). Evident, cu cât α este mai mic, $r_{xx}(k)$ scade mai repede (eşantioanele având un anumit decalaj în timp sunt mai slab corelate). In figura 2.2, sunt reprezentate densităţile spectrale de putere în cele două cazuri.

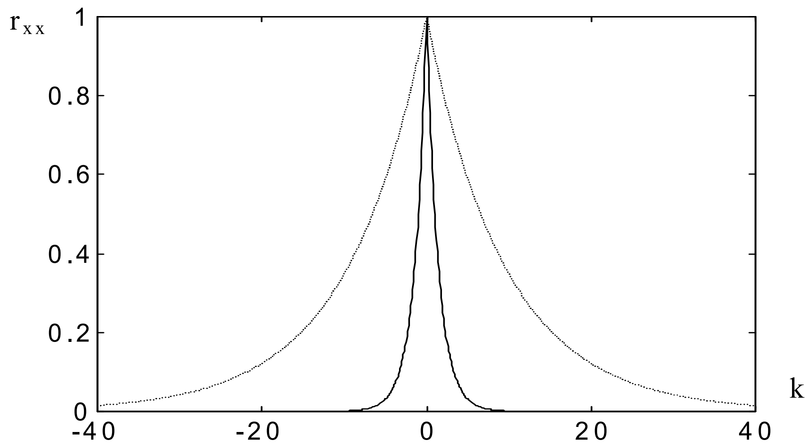


Fig. 2.1 Funcţiile de autocorelaţie pentru $\alpha = 0{,}5$ (linie plină) şi $\alpha = 0{,}9$ (linie punctată)

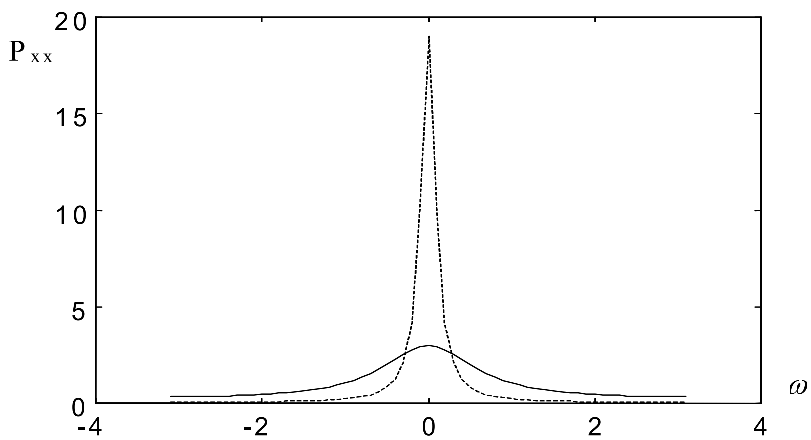


Fig. 2.2 Densităţile spectrale de putere pentru $\alpha = 0{,}5$ (linie plină) şi $\alpha = 0{,}9$ (linie punctată)

Se vede că la valori mai mici ale lui α, rezultă o mai mare "împrăştiere" a puterii în frecvenţă (semnalul se apropie mai mult de un zgomot alb, când $\alpha \to 0$). Exemplul considerat ilustrează de fapt o proprietate mai generală, conform căreia “durata” funcţiei de autocorelaţie şi lărgimea de bandă a spectrului de putere al semnalului se află într-o dependenţă inversă.

2.1.4 Matricea de autocorelaţie a unui proces staţionar

Fie seria temporală trunchiată, reprezentată prin vectorul

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \ldots, x(n-N+1)]^T \tag{2.48}$$

unde x este un proces staţionar în sens larg. Se defineşte matricea de autocorelaţie prin:

$$\mathbf{R} = \mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(N-1) \\ r(-1) & r(0) & \ldots & r(N-2) \\ \vdots & & & \\ r(-N+1) & r(-N+2) & \ldots & r(0) \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

unde indicele H semnifică operaţiile de conjugare şi transpunere, iar

$$r(k) = \mathrm{E}\{x^*(n)x(n+k)\} = \mathrm{E}\{x^*(n-k)x(n)\} \tag{2.50}$$

este funcţia de autocorelaţie a vectorului **x(**n). Altfel spus, elementul liniei *i* şi coloanei *j* al matricei **R** este $R_{ij} = r(j-i)$.

Având în vedere rolul foarte important pe care această matrice îl are în analiza statistică, vom prezenta în continuare o serie de proprietăţi ale acesteia.

1) Matricea de autocorelaţie pentru un proces aleator staţionar în sens larg este *hermitică*:

$$\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$$

Acest lucru este evident din definiţie (forma compactă) sau din forma dezvoltată, având în vedere că $r(-k) = r^*(k)$.

2) Matricea **R** este o matrice *Toeplitz* (are toate elementele de pe diagonala principală egale, iar elementele de pe orice altă diagonală paralelă cu diagonala principală, de asemenea, egale între ele).

3) Matricea **R** este *pozitiv semidefinită*. Pentru a demonstra această proprietate, vom arăta că pentru orice vector complex nenul **u** de dimensiune $N \times 1$,

$$\mathbf{u}^H \mathbf{R}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} r(j-i)\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j \geq 0. \tag{2.51}$$

Într-adevăr,

$$\mathbf{u}^H \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{u}^H\,\mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}\mathbf{u} = \mathrm{E}\{\mathbf{u}^H\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{u}\} = \mathrm{E}\left\{\left|\mathbf{u}^H\mathbf{x}(n)\right|^2\right\} \geq 0. \tag{2.52}$$

4) Fie $\mathbf{x}^B(n)$ vectorul obţinut inversând ordinea elementelor vectorului $\mathbf{x}(n)$:

$$\mathbf{x}^B(n) = [x(n-N+1), x(n-N+2), \ldots, x(n)]^T \tag{2.53}$$

Matricea de autocorelaţie a acestui vector se obţine prin transpunerea matricei **R** iniţiale:

$$\mathrm{E}\{\mathbf{x}^B(n)\mathbf{x}^{BH}(n)\} = \mathbf{R}^T. \tag{2.54}$$

5) Matricea **R** aşa cum a fost definită, este de dimensiune NxN. Putem pune în evidenţă acest lucru, adăugând un indice inferior ($\mathbf{R}_N$). Adăugând încă un element la vectorul $\mathbf{x}(n)$ va rezulta o *matrice de autocorelaţie extinsă* de dimensiune (N+1)x(N+1) pe care o notăm deci $\mathbf{R}_{N+1}$. Se poate uşor vedea că sunt posibile următoarele partiţii:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N & \mathbf{r}^{B*} \\ \mathbf{r}^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

unde

$$\mathbf{r}^H = [r(1), r(2), ..., r(N)] \tag{2.56}$$

Fie λ_i valorile proprii ale matricei **R**, deci rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \tag{2.57}$$

şi $\mathbf{q}_i$ vectorii proprii asociaţi,

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i, \quad i = 1,...,N. \tag{2.58}$$

6) Valorile proprii ale matricei $\mathbf{R}^k$, unde k este întreg, sunt λ_i^k, i=1,2,..,N.

7) Dacă valorile proprii λ_i, i=1,..,N sunt distincte, atunci vectorii $\mathbf{q}_i$ corespunzători sunt liniar independenţi, şi pot fi deci utilizaţi ca o bază pentru reprezentarea oricărui vector **w** în spaţiul respectiv.

8) Toate valorile proprii ale matricei de autocorelaţie sunt reale şi pozitive. Este o consecinţă a proprietăţilor 1 şi 3. Într-adevăr, înmulţind la stânga relaţia (2.58) cu $\mathbf{q}_i^H$ se obţine

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{q}_i^H \mathbf{R} \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_i} \geq 0 \tag{2.59}$$

9) Vectorii proprii $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}_j$, corespunzători unor valori proprii distincte, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i, j = 1,2,...,N$, $i \neq j$, sunt ortogonali,

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = 0 \tag{2.60}$$

Pentru demonstraţie vom scrie, conform definiţiei:

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i, \mathbf{R}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j \tag{2.61}$$

şi vom înmulţi prima relaţie cu $\mathbf{q}_j^H$,

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{R} \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i \tag{2.62}$$

Celei de-a doua relaţii i se aplică o transpunere hermitică (transpunere şi conjugare complexă), ţinând seama şi de proprietatea 1,

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{R}^H = \mathbf{q}_j^H \mathbf{R} = \lambda_j \mathbf{q}_j^H \tag{2.63}$$

după care se înmulţeşte cu $\mathbf{q}_i$ la dreapta

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{R} \mathbf{q}_i = \lambda_j \mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i \tag{2.64}$$

şi se scade din ecuaţia obţinută mai înainte,

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = 0 \tag{2.65}$$

care demonstrează proprietatea enunţată. În particular, deoarece prin înmulţirea unui vector propriu cu o constantă se obţine tot un vector propriu, se poate construi un set ortonormat de vectori proprii

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.66}$$

10) Matricea **R** poate fi diagonalizată în cazul în care valorile proprii sunt distincte conform relaţiei:

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \tag{2.67}$$

unde

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_N], \quad \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \tag{2.68}$$

iar $\mathbf{q}_i$ reprezintă un set ortonormal de vectori proprii. Evident, matricea **Q** este unitară, în sensul că:

$$\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \text{ sau } \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H. \tag{2.69}$$

Demonstraţia proprietăţii este imediată, având în vedere că din relaţiile (2.58) rezultă:

$$\mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} \tag{2.70}$$

şi înmulţind la stânga cu $\mathbf{Q}^H$ se obţine (2.67).

Înmulţind aceeaşi ecuaţie cu $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H$ rezultă *teorema lui Mercer* sau *teorema spectrală*:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^H. \tag{2.71}$$

11) *Urma matricei* **R,** adică suma elementelor de pe diagonala principală, este egală cu suma valorilor proprii

$$\mathrm{tr}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \tag{2.72}$$

Este o proprietate mai generală a matricelor pătrate, care în cazul de faţă conduce la

$$r(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i. \tag{2.73}$$

12) Se defineşte *norma spectrală* a unei matrice **A** prin

$$\|\mathbf{A}\|_s = \left(\text{valoarea proprie maxima a matricei } \mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.74}$$

În cazul matricei **R**, aceasta înseamnă, ţinând seama de proprietăţile 1 şi 6,

$$\|\mathbf{R}\|_s = \lambda_{\max}. \tag{2.75}$$

Se defineşte *numărul condiţional* al unei matrice, prin

$$\chi(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_s \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_s \tag{2.76}$$

În cazul matricei **R**:

$$\|\mathbf{R}\|_s = \lambda_{\max}, \quad \left\|\mathbf{R}^{-1}\right\|_s = \frac{1}{\lambda_{\min}}, \quad \Rightarrow \quad \chi(\mathbf{R}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \tag{2.77}$$

unde $\lambda_{\min}$ şi $\lambda_{\max}$ sunt respectv valoarea proprie minimă şi maximă ale matricei **R.** Se spune că o matrice este "rău condiţionată" când acest număr are valori mari, aceasta conducând la dificultăţi în calculul numeric.

13) *Câtul Rayleigh* asociat unui vector **u** nenul, de dimensiune Nx1, definit prin

$$\frac{\mathbf{u}^H\mathbf{R}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}} \tag{2.78}$$

ia valori limitate inferior şi superior conform:

$$\lambda_{\min} = \min\frac{\mathbf{u}^H\mathbf{R}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}}, \quad \lambda_{\max} = \max\frac{\mathbf{u}^H\mathbf{R}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}} \tag{2.79}$$

Acesta este o consecinţă a "teoremei minimax" din algebra liniară.

14) Valorile proprii ale matricei de autocorelaţie sunt mărginite superior şi inferior de valorile maximă şi respectiv, minimă ale densităţii spectrale de putere,

$$\min_{\omega} P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) \le \lambda_i \le \max_{\omega} P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) \tag{2.80}$$

Exemple:

1) Cazul unui zgomot alb:

$$r(k) = \mathrm{E}\left\{x^*(n)x(n+k)\right\} = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

deci

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

2) Cazul unei sinusoide complexe, $x(n) = A\,e^{jn\omega}$, $A = |A|e^{j\varphi}$ în care A şi ω sunt nişte constante, iar φ este o variabilă aleatoare.

$$r(k) = \mathrm{E}\left\{|A|e^{-j\varphi}e^{-jn\omega}|A|e^{j\varphi}e^{j(n+k)\omega}\right\} = |A|^2\, e^{jk\omega}$$

$$\mathbf{R} = |A|^2 \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & . \; . \; . & e^{j(N-1)\omega} \\ e^{-j\omega} & 1 & . \; . \; . & e^{j(N-2)\omega} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ e^{-j(N-1)\omega} & e^{-j(N-2)\omega} & . \; . \; . & 1 \end{bmatrix} = |A|^2 \mathbf{e}(\omega)\mathbf{e}^H(\omega)$$

unde

$$\mathbf{e}(\omega) = \left[1, e^{-j\omega}, ..., e^{-j(N-1)\omega}\right]^T$$

1) Sinusoidă complexă însumată cu zgomot alb, cu valoare medie nulă,

$$x(n) = A\,e^{jn\omega} + v(n)$$

$$r(k) = \begin{cases} |A|^2 + \sigma^2, & k = 0 \\ |A|^2\, e^{jk\omega}, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} |A|^2 + \sigma^2 & |A|^2 e^{j\omega} & . \; . \; . & |A|^2 e^{j(N-1)\omega} \\ |A|^2 e^{-j\omega} & |A|^2 + \sigma^2 & . \; . \; . & |A|^2 e^{j(N-2)\omega} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ |A|^2 e^{-j(N-1)\omega} & |A|^2 e^{-j(N-2)\omega} & . \; . \; . & |A|^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$

2.2 RĂSPUNSUL SISTEMELOR DISCRETE ÎN TIMP LA PROCESE ALEATOARE

Fie $x(n)$ un proces aleator staţionar în sens larg aplicat unui sistem liniar, invariant în timp, cu funcţia de pondere $h(n)$. Semnalul de la ieşirea sistemului, $y(n)$, poate fi exprimat prin convoluţia

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)=x(n)*h(n) \tag{2.81}$$

- *Valoarea medie a semnalului la ieşire*

$$\mathrm{E}\{y(n)\}=\mathrm{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\mathrm{E}\{x(n-k)\}=m_x\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)=m_x H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}\right) \tag{2.82}$$

- *Funcţia de corelaţie între semnalele de la ieşire şi intrare*

$$r_{yx}(k)=\mathrm{E}\left\{y(n+k)x^*(n)\right\}=\mathrm{E}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)x(n+k-l)x^*(n)\right\}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)\mathrm{E}\left\{x(n+k-l)x^*(n)\right\}$$

$$r_{yx}(k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)r_{xx}(k-l)=r_{xx}(k)*h(k) \tag{2.83}$$

- *Funcţia de autocorelaţie a ieşirii*

$$r_{yy}(k)=\mathrm{E}\left\{y(n+k)y^*(n)\right\}=\mathrm{E}\left\{y(n+k)\sum_{l=-\infty}^{\infty}x^*(l)h^*(n-l)\right\}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h^*(n-l)\mathrm{E}\left\{y(n+k)x^*(l)\right\}=$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h^*(-l)r_{yx}(k-l)=r_{yx}(k)*h^*(-k) \tag{2.84}$$

Ţinând seama de expresia obţinută pentru funcţia $r_{yx}(k)$ rezultă

$$r_{yy}(k)=r_{xx}(k)*h(k)*h^*(-k) \tag{2.85}$$

Rezultatele obţinute pot fi reprezentate sintetic prin schema din figura 2.3.

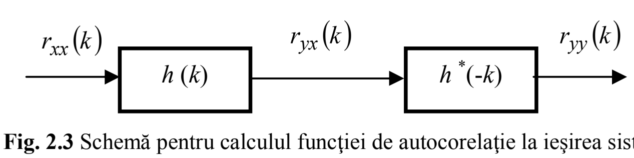


Fig. 2.3 Schemă pentru calculul funcţiei de autocorelaţie la ieşirea sistemului

- *Densitatea spectrală de putere a semnalului de ieşire*

Vom presupune în cele ce urmează că semnalul de intrare are valoare medie nulă, deci

$$Z\{r_{xx}(k)\} = P_{xx}(z); \qquad Z\{r_{yy}(k)\} = P_{yy}(z) \tag{2.86}$$

şi vom nota funcţia de transfer a sistemului

$$H(z) = Z\{h(n)\} \tag{2.87}$$

Rezultă imediat

$$Z\{h^*(-n)\} = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \tag{2.88}$$

deci având în vedere expresia obţinută mai înainte pentru r_{yy} şi teorema convoluţiei,

$$P_{yy}(z) = P_{xx}(z)H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \tag{2.89}$$

sau, în frecvenţă:

$$P_{yy}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|^2 \tag{2.90}$$

- *Puterea medie a semnalului la ieşire.*

Presupunând în continuare valoarea medie a semnalului nulă,

$$r_{yy}(0) = c_{yy}(0) = \sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{d}\,\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|^2 \mathrm{d}\,\omega \tag{2.91}$$

Utilizând transformate Z,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_C P_{yy}(z)z^{-1}\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_C P_{xx}(z)H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}\,\mathrm{d}\,z,\ \ C = \{z \in \mathbb{C}\,\|z| = 1\} \tag{2.92}$$

În cazul unui sistem cu funcţie de pondere reală, rămâne:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_C P_{xx}(z)H(z)H\left(z^{-1}\right)z^{-1}\,\mathrm{d}\,z,\ \ C = \{z \in \mathbb{C}\,\|z| = 1\} \tag{2.93}$$

O exprimare temporală se obţine pornind de la (2.84) care pentru k=0 conduce la

$$\sigma_y^2 = r_{yy}(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*(l)r_{yx}(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*(l)r_{xx}(l-m)h(m) \tag{2.94}$$

deci

$$\sigma_y^2 = \mathrm{E}\left\{|y(n)|^2\right\} = \mathbf{h}^H\mathbf{R}\mathbf{h} \tag{2.95}$$

unde **h** este vectorul coloană format cu elementele $h(n)$, iar **R** este matricea de autocorelaţie. Această exprimare prezintă interes în special în cazul filtrelor cu răspuns finit la impuls, când dimensiunile lui **h** şi **R** sunt finite.

- *Aplicaţie în cazul unui zgomot alb* cu valoare medie nulă m_x=0 şi varianţă (putere medie) σ_x^2;

$$r_{xx}(k) = \sigma_x^2 \delta(k), \quad P_{xx}(z) = \sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \sigma_x^2 \oint_C H(z) H\left(z^{-1}\right) z^{-1}\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\pi} \sigma_x^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left| H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|^2 \mathrm{d}\,\omega$$

2.3 FACTORIZAREA SPECTRALĂ. TEOREMA LUI WOLD

2.3.1. Procese aleatoare regulate. Factorizarea spectrală.

Densitatea spectrală de putere, $P_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, pentru un proces aleator discret, staţionar în sens larg, este o funcţie reală, pozitivă şi periodică. Vom arăta în continuare că, dacă ea este o funcţie continuă de ω, $P_{xx}(\mathrm{z})$ poate fi factorizat sub forma:

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \tag{2.96}$$

Relaţia de mai sus defineşte *factorizarea spectrală* a lui $P_{xx}(z)$.

Fie $x(n)$ un proces staţionar în sens larg, cu valoare medie nulă şi cu o densitate spectrală de putere $P_{xx}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, continuă (ceea ce presupune absenţa componentelor periodice):

$$P_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n) z^{-n} \tag{2.97}$$

Să presupunem, în plus, că $\ln P_{xx}(z)$ este analitică într-o coroană circulară $R < |z| < \frac{1}{R}$, $R<1$, conţinând cercul unitate. Ca urmare, este posibilă o dezvoltare în serie Laurent:

$$\ln P_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) z^{-n} \tag{2.98}$$

sau pe cercul unitar

$$\ln P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} \tag{2.99}$$

Din ultima relaţie rezultă că $a(n)$ reprezintă coeficienţii dezvoltării în serie Fourier ai funcţiei periodice $\ln P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$. Deoarece aceasta e o funcţie reală, rezultă că secvenţa $a(n)$ este conjugat simetrică,

$$a(n) = a^*(-n) \tag{2.100}$$

$$a(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_{xx}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \mathrm{d}\,\omega \tag{2.101}$$

Secvenţa $a(n)$ poartă numele de *cepstrum* al secvenţei $r_{xx}(n)$. Mai departe

$$P_{xx}(z) = \exp\{a(0)\} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n) z^{-n}\right\} \exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{-1} a(n) z^{-n}\right\} \tag{2.102}$$

Vom defini:

$$Q(z) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n) z^{-n}\right\}, \quad |z| > R \tag{2.103}$$

Deoarece $Q(z)$ şi $\ln Q(z)$ sunt analitice în $|z| > R$, înseamnă că $Q(z)$ este o funcţie de fază minimă (fără nuluri în exteriorul cercului de rază unitate). Ultimul termen din factorizarea lui $P(z)$ mai poate fi scris :

$$\exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{-1} a(n) z^{-n}\right\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(-n) z^{n}\right\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\left(\frac{1}{z^*}\right)^{-n}\right\}^* = Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \quad (2.104)$$

aşa încât

$$P_{xx}(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \quad (2.105)$$

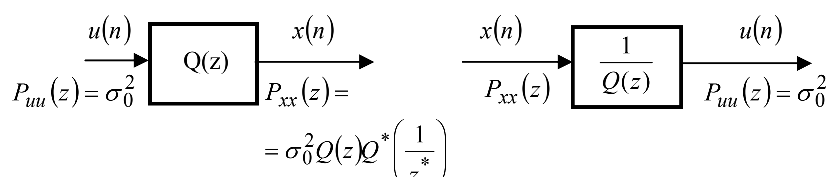
unde

$$\sigma_0^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln P\left(e^{j\omega}\right) d\omega\right\} \quad (2.106)$$

Un proces care îndeplineşte condiţiile precizate mai înainte şi admite o asemenea factorizare spectrală se spune că este un *proces regulat*.

Proprietăţi ale proceselor regulate.

- Un asemenea proces poate fi considerat ca ieşirea unui filtru stabil şi cauzal, având la intrare zgomot alb cu varianţa σ_0^2 (figura 2.4.a).



a. **b**.

Fig. 2.4 Reprezentarea unui proces staţionar în sens larg cu ajutorul inovaţiilor

Această reprezentare a procesului aleator $x(n)$ este cunoscută în literatură sub denumirea de *reprezentare cu ajutorul inovaţiilor*.

- Filtrul având funcţia de transfer inversă, $1/Q(z)$, poate fi considerat un *filtru de albire* pentru procesul aleator cu densitatea spectrală de putere $P_{xx}(z)$.
- $Q(z)$ poate fi reprezentat printr-o serie de puteri:

$$Q(z) = q(0) + q(1)z^{-1} + q(2)z^{-2} + \ldots \quad (2.107)$$

unde $q(0) = 1$, deoarece evident

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = q(0) = 1 \quad (2.108)$$

- Dacă $P_{xx}(z)$ este o funcţie raţională, atunci

$$Q(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.109)$$

şi factorizarea are forma:

$$P_{xx}(z)=\sigma_0^2 Q(z)Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right)=\sigma_0^2\frac{B(z)B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A(z)A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \tag{2.110}$$

unde

$$\begin{aligned} A(z)&=1+a(1)z^{-1}+a(2)z^{-2}+\ldots+a(N)z^{-N}\\ B(z)&=1+b(1)z^{-1}+b(2)z^{-2}+\ldots+b(M)z^{-M} \end{aligned} \tag{2.111}$$

iar polinoamele $A(z)$, $B(z)$ au toate zerourile în interiorul cercului de rază unitate.

2.3.2 Teorema lui Wold

Forma reprezentare a semnalelor aleatoare, prezentată mai înainte, fiind după cum s-a văzut, supusă unor restricţii, nu este cea mai generală.

Teorema lui Wold stabileşte că un proces staţionar în sens larg poate fi descompus în două părţi:

-*un proces regulat* $x_r(n)$

-*un proces predictibil* $x_p(n)$

Se spune că un proces $x_p(n)$ este predictibil dacă există un set de coeficienţi $a(n)$, aşa încât:

$$x_p(n)=\sum_{k=1}^{\infty}a(k)x_p(n-k) \tag{2.112}$$

Altfel spus, orice eşantion poate fi determinat fără eroare, cunoscând eşantioanele precedente.

Se poate însă arăta că pentru un asemenea proces, densitatea spectrală de putere este de forma:

$$P_p\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(\omega-\omega_k) \tag{2.113}$$

Rezultă că o formă generală a densităţii spectrale de putere este

$$P\left(e^{j\omega}\right)=P_r\left(e^{j\omega}\right)+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(\omega-\omega_k) \tag{2.114}$$

unde $P_r(e^{j\omega})$, partea continuă a spectrului, corespunde unui proces regulat.

2.4 ELEMENTE DE TEORIA ESTIMĂRII

Noţiunea de estimare în prelucrarea semnalelor se referă la deducerea valorilor unor mărimi necunoscute sau aleatoare pornind de la un set de observaţii ce reprezintă variabile aleatoare.

Din afirmaţia de mai sus rezultă existenţa a două aspecte distincte.

a. *Estimarea parametrilor* - se referă la aflarea unor parametri determinişti dar necunoscuţi pornind de la setul de observaţii. Exemple: determinarea valorii medii, a funcţiei de autocorelaţie, a densităţii spectrale de putere pentru un proces aleator staţionar.

b. *Estimarea unei variabile aleatoare*. De exemplu, determinarea eşantioanelor de la intrarea unui sistem cunoscând ieşirea acestuia, suprapusă peste un zgomot. Este evident o problemă mai complexă decât prima.

In cele ce urmează ne vom concentra atenţia numai asupra primului aspect.

Să presupunem că se doreşte estimarea unui parametru θ al densităţii de probabilitate $w_x(x;\theta)$ a unui proces aleator x pe baza observaţiilor $\mathbf{x}^o = [x(0), x(1), ..., x(N-1)]^T$. Vom nota cu

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}^o) \tag{2.115}$$

o estimare a lui θ, realizată pe baza setului de observaţii $\mathbf{x}^o$. Aceasta este evident o funcţie de $\mathbf{x}^o$ (vector aleator) şi în consecinţă este de asemenea o variabilă aleatoare. Pentru aprecierea unui estimator se pot utiliza diverşi indicatori.

- *Deplasarea* unui estimator se defineşte prin:

$$\mathrm{B}(\theta) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta \tag{2.116}$$

Se spune că estimatorul e nedeplasat dacă $\mathrm{B}(\theta) = 0$. Dacă $\mathrm{B}(\theta) \to 0$ când $N \to \infty$, estimatorul se numeşte *asimptotic nedeplasat*.

- *Eroarea pătratică medie*:

$$\mathrm{EPM} = \mathrm{E}\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right|^2\right\} \tag{2.117}$$

- *Varianţa* şi *dispersia*:

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}}^2 = \mathrm{E}\left\{\left|\hat{\theta} - \mathrm{E}(\hat{\theta})\right|^2\right\} \tag{2.118}$$

- *Consistenţa* unui estimator. Un estimator e consistent dacă pentru orice ε>0, oricât de mic,

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \varepsilon\right\} = 0 \tag{2.119}$$

- *Funcţia de plauzibilitate* este definită prin densitatea de probabilitate

$$l(\theta) = w_x(x, \theta) \tag{2.120}$$

În unele cazuri este mai convenabil să se lucreze cu logaritmul acestei funcţii,

$$L(\theta) = \ln(w_x(x, \theta)) \tag{2.121}$$

Dacă θ este un vector cu M componente, $L(\theta)$ este şi el un vector

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) = [L(\theta_1), L(\theta_2), ..., L(\theta_M)]^T \tag{2.122}$$

- *Măsura informaţiei unui parametru în sensul Fischer*

$$I(\theta) = -\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2}\right\} = -\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln w_x(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right\} \tag{2.123}$$

Se poate demonstra că este posibilă şi următoarea exprimare echivalentă

$$I(\theta) = \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\partial \ln w_x(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right\} \tag{2.124}$$

Evident, o posibilitate de a găsi un estimator este de a maximiza după θ funcţia de plauzibilitate,

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \arg\max_{\theta}\{w_x(\mathbf{x}, \theta)\} \tag{2.125}$$

Un asemenea estimator se numeşte *de plauzibilitate maximă.*

Dacă θ este un vector cu M componente, această măsură se exprimă printr-o matrice de dimensiuni $M \times M$, având drept elemente

$$I_{k,l} = -\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 \ln w_x(x,\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_k \partial\theta_l}\right\} \tag{2.126}$$

sau, altfel scris,

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathrm{E}\left\{\nabla\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})(\nabla\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}))^T\right\} \tag{2.127}$$

- *Marginea Cramér-Rao* reprezintă o valoare minimă pentru varianţa unui estimator nedeplasat. În cazul unui estimator θ scalar, presupunând că derivata a doua a funcţiei $L(\theta)$ există şi este absolut integrabilă,

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq I^{-1}(\theta) \tag{2.128}$$

În relaţia de mai sus se obţine egalitate dacă şi numai dacă estimatorul satisface relaţia

$$\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta = K(\theta)\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} \tag{2.129}$$

în care $K(\theta)$ nu depinde de valoarea estimată.

Dacă această limită este atinsă, se spune că estimatorul este *de varianţă minimă* sau că este *eficient*. În cazul unui estimator vectorial, inegalitatea de mai sus se transformă în afirmaţia că matricea

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.130}$$

unde $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ este matricea de autocovarianţă a estimatorului, este pozitiv semidefinită. In acest caz estimatorul de varianţă minimă se obţine dacă

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta} = K(\boldsymbol{\theta})\nabla\{L(\boldsymbol{\theta})\} \tag{2.131}$$

Aplicaţii

1. *Estimarea valorii medii.*

Fie o variabilă aleatoare gaussiană, caracterizată prin:

$$w_x(x;m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

Să presupunem cunoscut setul de observaţii independente $\mathbf{x} = [x_0, x_1, ..., x_{N-1}]^T$. Densitatea de probabilitate de ordinul N este deci

$$w_x(\mathbf{x};m) = \prod_{i=1}^{N} w_x(x_i;m) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$L(m) = -\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma_0^2\right) - \sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma_0^2}$$

$$\frac{\partial L(m)}{\partial m} = \sum_{i=0}^{N-1}\frac{x_i - m}{\sigma_0^2}$$

Egalând cu 0 această cantitate se obţine estimatorul de plauzibilitate maximă:

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

Evident, estimatorul este nedeplasat, căci:

$$\mathrm{E}\{\hat{m}\} = \frac{1}{N}\mathrm{E}\left\{\sum_{i=0}^{N-1} x_i\right\} = m$$

Varianţa estimatorului este

$$\mathrm{var}\{\hat{m}\} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{var}\{x_i\} = \frac{\sigma_0^2}{N}$$

În fine,

$$I(m) = -\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 L(m)}{\partial m^2}\right\} = \frac{N}{\sigma_0^2}$$

deci

$$\mathrm{var}(\hat{m}) = I^{-1}(m)$$

aşa încât estimatorul este şi de varianţă minimă. Lucrul acesta era de aşteptat având în vedere că

$$\hat{m}(\mathbf{x}) - m = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i - m = \frac{\sigma_0^2}{N}\frac{\partial L(m)}{\partial m}$$

2. *Estimarea dispersiei*.

Pentru acelaşi caz al variabilei gaussiene,

$$\frac{\partial L(\sigma_0^2)}{\partial(\sigma_0^2)} = -\frac{N}{2\sigma_0^2} + \sum_{i=0}^{N-1}\frac{(x_i - m)^2}{\sigma_0^4}$$

Egalând cu zero se obţine estimatorul varianţei:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - m)^2$$

Dacă m nu este cunoscut, se va utiliza pentru el estimatorul obţinut mai înainte:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - \hat{m})^2$$

Să calculăm valoarea medie a estimatorului:

$$\mathrm{E}\{\hat{\sigma}_0^2\} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\mathrm{E}\{x_i^2\} + \mathrm{E}\{\hat{m}^2\} - 2\,\mathrm{E}\{x_i\hat{m}\}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\mathrm{E}\{x_i^2\} + \frac{1}{N^2}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{E}\{x_l x_j\} - \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{E}\{x_i x_j\}\right)$$

Observaţiile fiind presupuse independente:

$$\mathrm{E}\{x_i x_j\} = \begin{cases} \mathrm{E}\{x_i^2\}, & i = j \\ \mathrm{E}\{x_i\}\mathrm{E}\{x_j\} = m^2, & i \neq j \end{cases}$$

aşa încât, ţinând seama şi de staţionaritate,

$$\mathrm{E}\{\hat{\sigma}_0^2\} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{N-1}{N}\left(\mathrm{E}\{x_i^2\} - m^2\right)\right) = \frac{N-1}{N}\sigma_0^2$$

Se constată că estimatorii de plauzibilitate maximă a variantei sau ai dispersiei sunt deplasaţi. Totuşi,

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\{\hat{\sigma}_0^2\} = \sigma_0^2$$

deci ei sunt asimptotic nedeplasaţi. Uneori se preferă utilizarea estimatorului nedeplasat al dispersiei:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i - \hat{m})^2}$$

3. *Estimatori pentru funcţia de autocorelaţie*

Vom considera un proces aleator staţionar $x(n)$ de valoare medie nulă, deci:

$$r_{xx}(m) = c_{xx}(m) = \mathrm{E}\{x^*(n)x(n+m)\}$$

Procesul fiind ergodic,

$$r_{xx}(m) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^*(n)x(n+m)$$

Ne propunem să găsim un estimator utilizând numai setul de observaţii $x(n)$, n=0,...,N-1, deci pornind de la:

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n), & n \in \overline{[0, N-1]} \\ 0 & n \notin \overline{[0, N-1]} \end{cases}$$

Vom defini:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N^*(n)x_N(n+m)$$

unde M poate fi astfel ales încât să se obţină un estimator nedeplasat. Având în vedere suporturile finite,

$$\operatorname{supp} x_N(n) = \overline{[0, N-1]}, \quad \operatorname{supp} x_N^*(n+m) = \overline{[-m, N-1-m]},$$

rezultă $\hat{r}_{xx}(m) = 0$ pentru $|m|>N-1$.

Pentru m=0,...,N-1, limitele de însumare vor fi 0 şi N-1-m, aşa încât în general vom putea scrie:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N^*(n)x_N(n+m), & m \in \overline{[0, N-1]} \\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m \in \overline{[-(N-1), -1]} \end{cases}$$

Valoarea medie a estimatorului este:

$$\mathrm{E}\{\hat{r}_{xx}(m)\} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1-m}\mathrm{E}\left\{x_N^*(n)x_N(n+m)\right\} =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1-m} r_{xx}(m) = \frac{N-m}{M} r_{xx}(m), \quad m = 0,1,...,N-1$$

În mod asemănător, pentru m=-(N-1),...,-1 se obţine:

$$\mathrm{E}\{\hat{r}_{xx}(m)\} = \frac{N+m}{M} r_{xx}(m)$$

deci în general:

$$\mathrm{E}\{\hat{r}_{xx}(m)\} = \frac{N-|m|}{M} r_{xx}(m)$$

şi rezultă o deplasare a estimatorului:

$$B(\hat{r}_{xx}(m)) = \mathrm{E}(\hat{r}_{xx}(m)) - r_{xx}(m) = \frac{N-|m|-M}{M} r_{xx}(m)$$

Pentru a obţine un estimator nedeplasat se poate lua M=N-|m| deci:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N-m}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1-m} x_N^*(n)x_N(n+m), & m \in \overline{[0, N-1]} \\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m \in \overline{[-(N-1), -1]} \end{cases}$$

sau cu o exprimare unitară:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1} x_N^*(n)x_N(n+m), \quad m \in \overline{[-(N-1), N-1]}$$

Uneori se preferă să se ia M=N şi rezultă:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1-m} x_N^*(n)x_N(n+m), & m \in \overline{[0, N-1]} \\ \hat{r}_{xx}^*(-m), & m \in \overline{[-(N-1), -1]} \end{cases}$$

Acesta este evident un *estimator deplasat*, deoarece:

$$\mathrm{E}(\hat{r}_{xx}(m)) = \frac{N-|m|}{N} r_{xx}(m)$$

Totuşi când $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\{\hat{r}_{xx}(m)\} = r_{xx}(m)$$

şi deci estimatorul acesta este *asimptotic nedeplasat*.

2.5 MODELAREA PROCESELOR ALEATOARE

2.5.1 Modele ARMA. Forme particulare

În multe cazuri întâlnite în practică, procesul aleator poate fi modelat ca ieşire $x(n)$ a unui sistem liniar, invariant în timp, caracterizat printr-o funcţie de transfer raţională, $H(z)$,

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{2.132}$$

căruia i se aplică la intrare un semnal $u(n)$. Frecvent, $u(n)$ este un zgomot alb, el fiind cel care imprimă caracterul aleator al lui $x(n)$. El reprezintă o parte intrinsecă a modelului. Vom putea exprima deci $x(n)$ cu ajutorul ecuaţiei cu diferenţe finite:

$$x(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k u(n-k)-\sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k) \tag{2.133}$$

Acest model este cunoscut în literatură sub denumirea de model "ARMA" (auto regressive-moving average), deci *autoregresiv cu mediere mobilă*.

$H(z)$ se presupune un filtru stabil şi cauzal, aşa încât nulurile lui $A(z)$ se găsesc în interiorul cercului $|z|=1$.

Se ştie că densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieşire se poate calcula cu:

$$P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 P_{uu}\left(e^{j\omega}\right) \tag{2.134}$$

În cazul când $u(n)$ este zgomot alb, cu $P_{uu}\left(e^{j\omega}\right)=\sigma^2$,

$$P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)=\sigma^2\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \tag{2.135}$$

Fără a pierde din generalitate, vom considera că $a_o=b_o=1$, deoarece câştigul filtrului poate fi încorporat în σ^2. Se utilizează frecvent notaţia ARMA (M,N), care pune în evidenţă gradele numărătorului şi numitorului.

Forme particulare

-Modelul *autoregresiv* (AR), notat AR(N)=ARMA(0,N) se obţine pentru M=0. Rămân ecuaţia cu diferenţe finite :

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k)+u(n) \tag{2.136}$$

şi funcţia de transfer:

$$H(z)=\frac{1}{A(z)}=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{2.137}$$

-Modelul *mediere mobilă* (MA), notat MA(M)=ARMA(M,0), rezultă particularizând N=0:

$$x(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k u(n-k) \tag{2.138}$$

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{2.139}$$

Un proces ARMA(*M,N*), pentru *M* şi *N* finiţi, poate fi reprezentat printr-un proces $\mathrm{AR}(\infty)$ sau printr-un proces $\mathrm{MA}(\infty)$ Să ilustrăm această afirmaţie printr-un exemplu. Fie procesul ARMA(1,1), caracterizat prin funcţia de transfer:

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad |a_1| < 1, \quad |b_1| < 1 \tag{2.140}$$

Pentru a-l exprima ca un model AR, *H*(*z*) trebuie pus sub forma:

$$H(z) = \frac{1}{C(z)}, \quad C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k} = \frac{z + a_1}{z + b_1} \tag{2.141}$$

Dar

$$c_k = Z^{-1}\left\{\frac{z + a_1}{z + b_1}\right\}(k) \tag{2.142}$$

deci

$$c_k = (a_1 - b_1)(-b_1)^{k-1} \quad \text{pentru} \quad k \geq 1 \tag{2.143}$$

Dacă se doreşte aproximarea procesului ARMA(1,1) cu un proces AR(*L*), cu *L* finit, va fi necesar un ordin *L* cu atât mai mare cu cât nulul $z = -b_1$ este mai apropiat de cercul |*z*|=1.

Pentru a echivala procesul ARMA(1,1) cu un proces $\mathrm{MA}(\infty)$ vom scrie:

$$H(z) = \frac{z + b_1}{z + a_1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k} \tag{2.144}$$

din care

$$d_k = Z^{-1}\left\{\frac{z + b_1}{z + a_1}\right\}(k) = (b_1 - a_1)(-a_1)^{k-1} \quad \text{pentru} \quad k \geq 1 \tag{2.145}$$

Şi în acest caz, dacă se doreşte o aproximare a procesului ARMA(1,1) cu un proces MA(*L*) de ordin finit, *L* va fi cu atât mai mare cu cât polul $z = -a_1$ al procesului ARMA este situat mai aproape de cercul |*z*|=1.

2.5.2 Relaţii între parametrii modelului şi funcţia de autocorelaţie

Vom presupune că *u*(*n*) este un zgomot alb cu valoare medie nulă şi varianţă σ^2. Atunci:

$$P_{xx}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}{A^*\left(\frac{1}{z^*}\right)} \sigma^2 \tag{2.146}$$

sau

$$P_{xx}(z) A(z) = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) B(z) \sigma^2 \tag{2.147}$$

Vom aplica transformata z inversă acestei relaţii şi vom ţine seama că:

$$Z^{-1}\{P_{xx}(z)\}(k) = c_{xx}(k) = r_{xx}(k) \tag{2.148}$$

deoarece $x(n)$ va avea şi el valoarea medie nulă, şi

$$Z^{-1}\left\{H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} h^*(-n)z^{-n} \tag{2.149}$$

Rezultă, folosind teorema convoluţiei şi cauzalitatea secvenţei $h(n)$:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l r_{xx}(k-l) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{l=0}^{M} b_l h^*(l-k) = \sigma^2 \sum_{l=k}^{M} b_l h^*(l-k), & k = \overline{[0,M]} \\ 0, & k \geq M+1 \end{cases} \tag{2.150}$$

de unde:

$$r_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{l=1}^{N} a_l r_{xx}(k-l) + \sigma^2 \sum_{l=k}^{M} b_l h^*(l-k), & k = \overline{[0,M]} \\ -\sum_{l=1}^{N} a_l r_{xx}(k-l), & k \geq M+1 \end{cases} \tag{2.151}$$

Acestea relaţii sunt cunoscute sub denumirea de *ecuaţiile Yule-Walker*. În principiu, ele permit determinarea parametrilor modelului dacă se cunosc funcţiile de autocorelaţie. Cum în foarte multe cazuri acestea nu sunt cunoscute, ele pot fi eventual estimate, aşa cum s-a văzut în paragraful precedent, pe baza cunoaşterii unui număr de eşantioane (măsurări sau observaţii) ale unei realizări particulare a procesului aleator. Rezolvarea sistemului este simplă doar în cazul proceselor AR, când, deoarece M=0, dispare practic a doua sumă, care imprimă un caracter neliniar ecuaţiilor.

Pe de altă parte, ecuaţiile Yule-Walker oferă o metodă recursivă de calcul a funcţiilor de autocorelaţie, dacă sunt cunoscuţi parametrii modelului.

Alegerea unui model adecvat procesului studiat este esenţială. Este util ca modelul ales să aibă un număr minim de parametri. In cazul în care procesul studiat se caracterizează printr-o densitate spectrală de putere cu maxime "ascuţite", este indicată alegerea unui model AR, ştiind că asemenea maxime se obţin datorită unor poli situaţi în apropierea cercului |z|=1. Dacă, din contră, ea se caracterizează prin minime pronunţate, eventual anulări, este indicată alegerea unui model MA cu zerouri situate în apropierea sau pe cercul |z|=1. Când intervin ambele tipuri de comportări ale densităţii spectrale de putere, se va alege un model ARMA. Un alt parametru ce trebuie avut în vedere este şi panta caracteristicii densitate spectrală de putere - frecvenţă. O pantă mare (variaţie rapidă) va necesita pentru simulare un proces AR sau ARMA de ordin mare.

Bibliografie

[B1] **Bellanger M.G**., *Adaptive Digital Filters and Signal Analysis*, M. Dekker, New York, 1987.

[Ci2] **Ciochină S**., *Prelucrarea numerică a semnalelor*, partea II, UPB, 1986.

[Ha1] **Haykin S**., *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Englewood Clifs, N.J., 1991.

[Ka1] **Kay S.M**., *Modern Spectrum Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.

[N1] **Negrescu C**, *Bazele algoritmilor adaptivi de gradient. Metode de optimizare,* UPB, 1997.

[Op1] **Oppenheim A.V., Schafer R.W**., *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[Pa1] **Papoulis A**., *Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw-Hill, New York, 1991

[Pr2] **Proakis J.G., Rader C.M., Ling F., Nikias C.L.,** *Advanced Digital Signal Processing Algorithms, Macmillan Publishing Company*, 1992.

[St1] **Stanomir D**., Semnale şi sisteme discrete, Ed. Athena , 1997.

[SM1] **Stoica P., Moses R.,** *Introduction to spectral analysis*, Prentice Hall, 1997.

[Th1] **Therrien C. W**., *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.