

3

TEORIA FILTRĂRII LINIARE OPTIMALE

3.1 FILTRE WIENER CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

3.1.1 Criteriul de optimizare

În jurul anului 1940 Norbert Wiener introducea un nou punct de vedere în proiectarea filtrelor. Este vorba de a găsi un filtru care să permită o estimare cât mai corectă a unui semnal pornind de la cunoașterea valorilor acestuia perturbate de un zgomot aditiv. Fie $d(n)$ semnalul util, $v(n)$ zgomotul suprapus peste semnal și $x(n)$ semnalul perturbat, care reprezintă deci valorile măsurate sau recepționate (dacă ne referim la un sistem de comunicație). Vom presupune că atât $x(n)$ cât și $d(n)$ reprezintă realizări particulare ale unor procese staționare în sens larg, cu valori medii nule. Notând cu $y(n)$ răspunsul filtrului, am dori ca acesta să estimeze cât mai fidel semnalul dorit $d(n)$ (figura 3.1). Altfel spus, ne propunem să determinăm filtrul astfel încât acesta să minimizeze într-un anumit sens eroarea

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3.1)$$

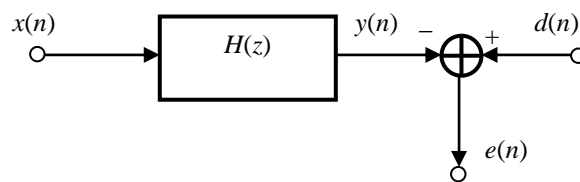


Fig. 3.1 Sistemul considerat

Pentru generalitate, vom considera că atât semnalele, cât și coeficienții filtrului sunt complecși. Vom nota funcția de pondere a filtrului

$$h(n) = w_n^*, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

așa încât

$$y(n) = (h * x)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* x(n-k), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

și

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* x(n-k) \quad (3.4)$$

N poate fi finit (cazul filtrelor FIR) sau infinit (în cazul filtrelor IIR).

În cele ce urmează, vom utiliza drept funcție cost eroarea medie pătratică și ne vom referi, pentru început, la cazul unui filtru cu răspuns finit la impuls.

Funcția cost va fi deci

$$J = E\{|e(n)|^2\} = E\{e(n)e^*(n)\} \quad (3.5)$$

care poate fi dezvoltată sub forma

$$\begin{aligned} J = E\left\{\left(d(n) - \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* x(n-k)\right)\left(d^*(n) - \sum_{k=0}^{N-1} w_k x^*(n-k)\right)\right\} = E\{d(n)d^*(n)\} - \\ - \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* E\{x(n-k)d^*(n)\} - \sum_{k=0}^{N-1} w_k E\{x^*(n-k)d(n)\} + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1-k} w_k^* w_i E\{x(n-k)x^*(n-i)\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dar

$$E\{d(n)d^*(n)\} = \sigma_d^2 \quad (3.7)$$

este varianța semnalului dorit și

$$\begin{aligned} E\{x(n-k)d^*(n)\} &= r_{xd}(-k) \\ E\{x^*(n-k)d(n)\} &= r_{xd}^*(-k) = r_{dx}(k) \end{aligned} \quad (3.8)$$

unde $r_{xd}(k)$ este funcția de corelație între semnalul de intrare și semnalul dorit. În fine,

$$E\{x(n-k)x^*(n-i)\} = r_{xx}(i-k), \quad (3.9)$$

unde $r_{xx}(k) = r(k)$ este funcția de autocorelație a semnalului de intrare. Rezultă:

$$J = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* r_{xd}(-k) - \sum_{k=0}^{N-1} w_k r_{xd}^*(-k) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1-k} w_k^* w_i r_{xx}(i-k) \quad (3.10)$$

Este posibilă și o exprimare matriceală, introducând notațiile:

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), \dots, x(n-N+1)]^T; \quad (3.11)$$

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T; \quad (3.12)$$

$$\mathbf{p} = [r_{xd}(0), r_{xd}(-1), \dots, r_{xd}(-N+1)]^T; \quad (3.13)$$

$$\mathbf{R} = E\{x(n)x^H(n)\} \quad (3.14)$$

În această relație \mathbf{p} este vectorul corelației dintre semnalul de intrare și semnalul dorit, iar \mathbf{R} este matricea de autocorelație a intrării.

Rezultă:

$$J = \sigma_d^2 - \mathbf{w}^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (3.15)$$

3.1.2 Ecuațiile Wiener-Hopf

Fie o funcție $f(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*): \mathbb{C}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]^T$

Condiția necesară pentru ca funcția să aibă un minim în \mathbf{z} este ca gradientul complex să se anuleze $\nabla_{\mathbf{z}} \{f(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)\} = \mathbf{0}$, adică \mathbf{z} să fie un punct staționar.

Prin definiție

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{z}} \{f\} &= \left[\frac{\partial f}{\partial z_0}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{N-1}} \right]^T \\ \nabla_{\mathbf{z}^*} \{f\} &= \left[\frac{\partial f}{\partial z_0^*}, \frac{\partial f}{\partial z_1^*}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{N-1}^*} \right]^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se definește derivata unei funcții reale în raport cu o variabilă complexă prin

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} - j \frac{\partial f}{\partial b_i} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z_i^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} + j \frac{\partial f}{\partial b_i} \right), \quad z_i = a_i + jb_i$$

Se observă că această definiție satisface unele proprietăți cunoscute ale derivării în raport cu o variabilă reală

xemple

$$\frac{\partial z_i}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} - j \frac{\partial}{\partial b_i} \right) (a_i + jb_i) = 1$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial z_i^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} + j \frac{\partial}{\partial b_i} \right) (a_i + jb_i) = 0$$

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} - j \frac{\partial}{\partial b_i} \right) (a_i - jb_i) = 0$$

În consecință

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{z}^* = \mathbf{0}; \quad \nabla_{\mathbf{z}^*} \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

adică \mathbf{z}^* și \mathbf{z} sunt tratate ca variabile independente în calculul gradientului. Ca urmare, dacă \mathbf{p} este un vector constant,

$$\nabla_{\mathbf{z}} \{\mathbf{p}^H \mathbf{z}\} = \mathbf{p}^* \quad \nabla_{\mathbf{z}^*} \{\mathbf{p}^H \mathbf{z}\} = \mathbf{0}$$

Într-adevăr,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \sum_{l=0}^{N-1} p_l^* (a_l + jb_l) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} - j \frac{\partial}{\partial b_i} \right) \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} p_l^* (a_l + jb_l) \right\} = p_i^*$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i^*} \sum_{l=0}^{N-1} p_l^* (a_l + jb_l) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} + j \frac{\partial}{\partial b_i} \right) \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} p_l^* (a_l + jb_l) \right\} = 0$$

La fel se arată că

$$\nabla_{\mathbf{z}}\{\mathbf{z}^H \mathbf{p}\} = \mathbf{0} \qquad \nabla_{\mathbf{z}^*}\{\mathbf{z}^H \mathbf{p}\} = \mathbf{p}$$

Dacă \mathbf{A} este o matrice constantă, pătrată, hermitică, de dimensiune N ,

- $\nabla_{\mathbf{z}}\{\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}\} = (\mathbf{A} \mathbf{z})^*$, deoarece în derivarea în raport cu \mathbf{z} , produsul $\mathbf{z}^H \mathbf{A}$ poate fi tratat ca un vector constant \mathbf{p}^H și se aplică prima din cele patru relații de mai sus.
- $\nabla_{\mathbf{z}^*}\{\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}\} = (\mathbf{A} \mathbf{z})$, deoarece în derivarea în raport cu \mathbf{z}^* , produsul $\mathbf{A} \mathbf{z}$ poate fi tratat ca un vector constant \mathbf{p} și se aplică ultima din cele patru relații de mai sus.

În fine, pentru ca un punct staționar să fie punct de extrem, Hessianul funcției mai trebuie să îndeplinească condiția

$$\nabla_{\mathbf{z} \mathbf{z}^*}^2 \{f\} \begin{cases} > 0 \text{ pentru un minim} \\ < 0 \text{ pentru un maxim} \end{cases}$$

unde semnul de inegalitate pentru matrice semnifică 'matrice pozitiv semidefinită', respectiv 'matrice negativ semidefinită'.

Se constată că J este o funcție de gradul doi de variabilele complexe $w_k = a_k + j b_k$, $k=0, \dots, N-1$. Pentru a găsi un eventual minim, vom egala cu zero gradientul complex,

$$\nabla_{\mathbf{w}^*} \{J\} = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

Dar

$$\nabla_{\mathbf{w}^*} \{\mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{p}^H \mathbf{w}\} = \nabla_{\mathbf{w}^*} \{\mathbf{w}^H \mathbf{p}\} + \nabla_{\mathbf{w}^*} \{\mathbf{p}^H \mathbf{w}\} = \mathbf{p} \tag{3.18}$$

$$\nabla_{\mathbf{w}^*} \{\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}\} = \mathbf{R} \mathbf{w} \tag{3.19}$$

Rezultă că :

$$\nabla \{\mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{p}^H \mathbf{w}\} = 2\mathbf{p}, \quad \nabla \{\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}\} = 2\mathbf{R} \mathbf{w}; \tag{3.20}$$

$$\nabla J = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R} \mathbf{w} = \mathbf{0}. \tag{3.21}$$

Hessianul transformării este evident

$$\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{w} \mathbf{w}^*}^2 \{J\} = 2\mathbf{R} \tag{3.22}$$

El este pozitiv semidefinit, așa încât suprafața reprezentată de $J(\mathbf{w})$ într-un spațiu $N+1$ dimensional, are un minim J_{\min} pentru $\mathbf{w} = \mathbf{w}^o$ care anulează gradientul. Aceștia vor fi deci coeficienții optimi căutați și ei sunt dați de

$$\mathbf{R} \mathbf{w}^o = \mathbf{p} \tag{2.23}$$

sau
$$\sum_{l=0}^{N-1} w_l^o r_{xx}(l-i) = r_{xd}(-i), \quad i = 0, \dots, N-1 \tag{2.24}$$

numită *ecuația Wiener-Hopf*. Varianța erorii minime este:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \sigma_d^2 - \mathbf{w}^{oH} \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w}^o + \mathbf{w}^{oH} \mathbf{R} \mathbf{w}^o = \sigma_d^2 - \mathbf{w}^{oH} \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w}^o + \mathbf{w}^{oH} \mathbf{p} = \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{w}^o = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Din analiza relației de mai sus, constatăm că valoarea minimă a funcției cost este mai mică decât puterea medie a semnalului dorit, deoarece $\mathbf{p}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \geq 0$, pentru că matricea de autocorelație și inversa ei sunt pozitiv semidefinte. Scăderea în raport cu σ_d^2 depinde în mod esențial de vectorul \mathbf{p} , deci de gradul de corelație dintre semnalul de intrare și semnalul dorit.

Dacă cele două semnale sunt necorelate, acest vector e nul și filtrarea optimală practic nu mai acționează. Se observă că în acest caz coeficienții filtrului sunt nuli, deci ieșirea filtrului e nulă. Ea este eficientă numai în măsura în care există o asemenea corelație.

3.1.3 Principiul ortogonalității

Ieșirea filtrului optim și eroarea respectivă pot fi exprimate prin:

$$y^o(n) = \mathbf{w}^{oH} \mathbf{x}(n) \quad (3.26)$$

$$e^o(n) = d(n) - \mathbf{w}^{oH} \mathbf{x}(n) \quad (3.27)$$

Efectuând media

$$E\{\mathbf{x}(n)e^{o*}(n)\} = E\{\mathbf{x}(n)d^*(n)\} - E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}^o\} = \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}^o = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Rezultatul de mai sus, exprimat sub una din formele:

$$E\{\mathbf{x}(n)e^{o*}(n)\} = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

sau

$$E\{x(n-k)e^{o*}(n)\} = 0, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.30)$$

reprezintă *principiul ortogonalității*. El pune în evidență faptul că în cazul filtrării optime, eroarea este ortogonală pe eșantioanele intrării.

Ca o consecință, rezultă imediat o relație de ortogonalitate între ieșirea $y^o(n)$ și eroarea $e^o(n)$ corespunzătoare filtrului optim

$$E\{y^o(n)e^{o*}(n)\} = 0 \quad (3.31)$$

O realizare posibilă ce corespunde modelului analizat până aici este aceea din figura 3.2, bazată pe o structură de filtru transversal.

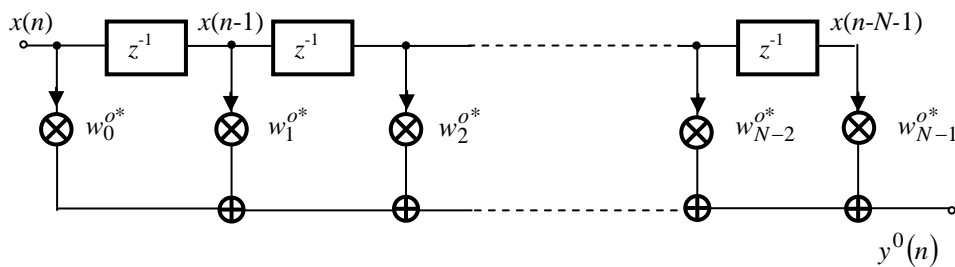


Fig. 3.2. Filtru optim în structura transversală

Aplicația 1

Să presupunem că un semnal util $s(n)$ este perturbat de un zgomot necorelat cu semnalul, $v(n)$. Dispunem deci de observațiile (măsurătorile)

$$x(n) = s(n) + v(n)$$

și ne propunem să construim un filtru optim pentru extragerea semnalului util $s(n)$. Acesta este și el un proces aleator, cu o funcție de autocorelație cunoscută,

$$r_{ss}(n) = \alpha^{|n|}, \quad 0 < \alpha < 1$$

iar zgomotul este alb, cu varianța σ_v^2 .

Semnalul dorit este

$$d(n) = s(n), \quad r_{dd}(n) = r_{ss}(n)$$

și

$$r_{dx}(n) = E\{d(k)x^*(k-n)\} = E\{d(k)d^*(k-n)\} + E\{d(k)v^*(k-n)\} = r_{dd}(n) + r_{dv}(n)$$

Deoarece $d(n)$ și $v(n)$ sunt necorelate

$$r_{xx}(n) = r_{dd}(n) + r_{vv}(n)$$

În consecință matricea de autocorelație este

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_d + \mathbf{R}_v$$

și ecuația Wiener-Hopf

$$(\mathbf{R}_d + \mathbf{R}_v)\mathbf{w} = \mathbf{r}_{dx}$$

Să considerăm $N=2$, deci

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

Sistemul devine

$$\begin{bmatrix} 1 + \sigma_v^2 & \alpha \\ \alpha & 1 + \sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

de unde

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2} \begin{bmatrix} 1 + \sigma_v^2 - \alpha^2 \\ \alpha \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

deci

$$H(z) = \frac{1 + \sigma_v^2 - \alpha^2 + \alpha \sigma_v^2 z^{-1}}{(1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2}$$

Puterea medie a semnalului la ieșire este

$$\begin{aligned} \sigma_{so}^2 &= \mathbf{w}^H \mathbf{R}_d \mathbf{w} = [w_0, w_1] \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = w_0^2 + 2\alpha w_0 w_1 + w_1^2 = \\ &= \frac{1}{\left((1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2\right)^2} \left((1 + \sigma_v^2 - \alpha^2)^2 + 2\alpha \sigma_v^2 (1 + \sigma_v^2 - \alpha^2) + \alpha^2 \sigma_v^4 \right) \end{aligned}$$

Puterea medie a zgomotului la ieșire este

$$\sigma_{vo}^2 = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_v \mathbf{w} = (w_0^2 + w_1^2) \sigma_v^2 = \frac{\sigma_v^2}{\left((1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2 \right)} \left((1 + \sigma_v^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 \sigma_v^4 \right)$$

Este interesant de evaluat îmbunătățirea raportului semnal zgomot, ca urmare a trecerii prin filtru. Pentru aceasta vom calcula raportul

$$Q = \frac{\frac{\sigma_{so}^2}{\sigma_{vo}^2}}{\frac{\sigma_s^2}{\sigma_v^2}} = 1 + \frac{2\alpha\sigma_v^2(1 + \sigma_v^2 - \alpha^2)}{\left((1 + \sigma_v^2)^2 - \alpha^2 \right) + \alpha^2 \sigma_v^4}$$

unde $\sigma_s^2 = r_{ss}(0) = 1$

Evident, în expresia lui Q , termenul al doilea al sumei este cuprins între 0 și 1, așa încât $1 < Q < 2$.

Îmbunătățirea maximă se obține când $\alpha \rightarrow 1$ (în care caz $Q \rightarrow 2$). Lucrul acesta este explicabil prin faptul că în acest caz "durata" funcției de autocorelație crește (deci eșantioanele sunt mai corelate între ele) iar densitatea spectrală de putere scade mai repede cu ω . Aceste proprietăți deosebesc mai puternic semnalul de zgomot din punct de vedere statistic făcând posibilă o separare mai bună a semnalului.

Valoarea mică a îmbunătățirii (maxim 2, deci 3 dB) este legată de ordinul mic al filtrului (unu, deci doi coeficienți).

Sugerăm cititorului repetarea exercițiului, eventual utilizând programe MATLAB, pentru $N=3$. Se va arăta că în acest caz, $Q \rightarrow 3$, când $\alpha \rightarrow 1$.

3.1.4 Filtre cu constrângeri liniare, cu varianță minimă

Există și situații în care se urmărește minimizarea unei funcții cost, în niște condiții impuse. De exemplu, să găsim un filtru RFI ce minimizează varianța ieșirii în condițiile realizării unui câștig impus g , la o frecvență dată, ω_0 , deci

$$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k^* e^{-jk\omega_0} = \mathbf{w}^H \mathbf{e}(\omega_0) = g \quad (3.32)$$

unde $\mathbf{e}(\omega) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(N-1)\omega}]^T$.

În locul unui "răspuns dorit", $d(n)$, se impune realizarea acestei condiții. Utilizând metoda multiplicatorilor lui Lagrange, vom defini funcția de cost reală:

$$J = E\{|y(n)|^2\} + \text{Re}\{\lambda(H(e^{j\omega_0}) - g)\} \quad (3.33)$$

Dacă este îndeplinită condiția (3.32), minimul varianței semnalului de ieșire se realizează simultan cu minimul lui J . Ecuația de mai sus se mai scrie:

$$\begin{aligned} J &= E\{y(n)y^*(n)\} + \frac{1}{2}(\lambda(\mathbf{w}^H \mathbf{e}(\omega_0) - g) + \lambda^*(\mathbf{e}^H(\omega_0)\mathbf{w} - g^*)) = \\ &= E\{\mathbf{w}^H \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}\} + \frac{1}{2}(\lambda(\mathbf{w}^H \mathbf{e}(\omega_0)) + \lambda^*(\mathbf{e}^H(\omega_0)\mathbf{w})) - \frac{1}{2}(\lambda g + \lambda^* g^*) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aplicând metoda gradientului complex, rezultă pentru coeficienții optimi, w_{ok} ,

$$\nabla J = \nabla\{\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}\} + \frac{1}{2} \nabla\{\lambda \mathbf{w}^H \mathbf{e}(\omega_0) + \lambda^* \mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{w}\} = 2\mathbf{R} \mathbf{w} + \lambda \mathbf{e}(\omega_0) = \mathbf{0}, \quad (3.35)$$

deci

$$\mathbf{w}^0 = -\frac{1}{2} \lambda \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0). \quad (3.36)$$

Pentru determinarea lui λ se va pune condiția ca vectorul astfel determinat să satisfacă relația (3.32):

$$g = -\frac{1}{2} \lambda^* \mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0) \Rightarrow \lambda = -\frac{2g^*}{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)} \quad (3.37)$$

și în final

$$\mathbf{w}^o = g^* \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)}{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)} \quad (3.38)$$

Varianța minimă a ieșirii în acest caz este:

$$E\left\{\left|y^o(n)\right|^2\right\} = J_{\min} = \mathbf{w}^{oH} \mathbf{R} \mathbf{w}^o = g \frac{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{w}^o}{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)} = g \frac{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{w}^o}{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)}, \quad (3.39)$$

deci

$$J_{\min} = \frac{|g|^2}{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)} \quad (3.40)$$

În cazul particular când $g=1$, filtrul lasă să treacă nemodificată componenta pe frecvența ω_0 , minimizând puterea medie la ieșire. Se spune în acest caz că este un filtru cu *varianța minimă și răspuns fără distorsiuni*" (la frecvența ω_0).

Bibliografie

- [B1] **Bellanger M.G.**, *Adaptive Digital Filters and Signal Analysis*, M. Dekker, New York, 1987.
- [Co1] **Cowan C. F. N., Grant P.M.**, *Adaptive Filters*, Mc. Graw-Hill, New York, 1983.
- [Ci1] **Ciochină S.**, *Sisteme adaptive*, UPB, 1997.
- [Ha1] **Hayes M.H.**, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley and Sons, 1966.
- [Ha2] **Haykin S.**, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [Ho1] **Honig M.L., Messerschmitt D.G.**, *Adaptive Filters*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [Li1] **Lim S.J., A.V. Oppenheim**, *Advanced Topics in Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.
- [Ne1] **Negrescu C.**, *Bazele algoritmilor adaptivi de gradient. Metode de optimizare*, UPB, 1997.
- [Pr1] **Proakis J.G., Manolakis D.G.**, *Digital Signal Processing*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992
- [Pr2] **Proakis J.G., Rader C.M., Ling F., Nikias C.L.**, *Advanced Digital Signal Processing Algorithms*, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [Wi1] **Widrow B., Stearns S.D.**, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985

4

PREDICȚIA LINIARĂ

Una din problemele cele mai importante ale analizei seriilor temporale este predicția valorii procesului aleator staționar la un anumit moment de timp, pe baza cunoașterii unui set finit de eșantioane anterioare sau posterioare în raport cu acest moment de timp. Apar deci două situații distincte, denumite *predicția înainte* sau *directă* și respectiv, *predicția înapoi* sau *inversă*.

4.1 Predicția înainte (directă)

Fie $x(n)$ un proces aleator staționar cu valoare medie nulă. Vom presupune cunoscut setul de eșantioane (observații) $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)$ și vom nota cu X_{n-1} , spațiul N dimensional al acestora. Ne punem problema determinării unei predicții liniare a valorii $x(n)$, de forma:

$$\hat{x}(n|X_{n-1}) = \sum_{k=1}^N w_k^* x(n-k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n-1), \quad (4.1)$$

unde

$$\mathbf{x}(n-1) = [x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)]^T, \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T \quad (4.2)$$

Vom nota eroarea de predicție:

$$e_N^f(n) = x(n) - \hat{x}(n|X_{n-1}) \quad (4.3)$$

și ne propunem determinarea parametrilor w_k astfel încât să fie minimizată eroarea pătratică medie:

$$P_N = E \left\{ \left| e_N^f(n) \right|^2 \right\}. \quad (4.4)$$

În expresiile de mai sus indicele inferior N se referă la ordinul predicției, iar indicele superior f arată că este vorba de o predicție înainte sau directă (*forward prediction*, în limba engleză).

Deoarece $e_N^f(n)$ are valoare medie nulă, P_N reprezintă totodată varianța erorii precum și *puterea erorii de predicție*. Problema propusă este însă similară celei rezolvate în paragraful precedent, cu deosebirea că semnalul dorit $d(n)$ este înlocuit cu $x(n)$, iar setul de observații $x(n), \dots, x(n-N+1)$ este înlocuit cu $x(n-1), \dots, x(n-N)$. Matricea de autocorelație este în acest caz

$$\mathbf{R} = E \left\{ \mathbf{x}(n-1) \mathbf{x}^H(n-1) \right\} \quad (4.5)$$

și are, în baza staționarității, aceeași formă ca și în cazul discutat mai înainte al filtrării optimale. Locul vectorului \mathbf{p} va fi luat de

$$\mathbf{r} = E\{\mathbf{x}(n-1)x^*(n)\} = [r_{xx}(-1), r_{xx}(-2), \dots, r_{xx}(-N)]^T \quad (4.6)$$

În fine, eroarea $e(n)$ se înlocuiește cu $e_N^f(n)$ dat de (4.3), iar media sa pătratică, J_{\min} cu P_N , și

$$\sigma_d^2 = E\{|x(n)|^2\} = \sigma_x^2 = r_{xx}(0) \quad (4.7)$$

În consecință se pot prelua direct următoarele rezultate:

- *ecuația Wiener-Hopf (ecuația normală)*

$$\mathbf{R}\mathbf{w}^o = \mathbf{r} \quad \text{sau} \quad \mathbf{w}^o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \quad (4.8)$$

- *principiul ortogonalității*, conform căruia, în cazul predicției liniare optime, eroarea de predicție este ortogonală pe oricare din eșantioanele ce reprezintă observația,

$$E\{\mathbf{x}(n-1)e_N^{f*}(n)\} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

- *expresia puterii erorii de predicție*, în cazul coeficienților optimi,

$$P_N = \sigma_x^2 - \mathbf{r}^H \mathbf{w}^o = r_{xx}(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}^o = r(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}^o \quad (4.10)$$

Ecuația prin care este definit predictorul corespunde fizic unui filtru cu răspuns finit la impuls, având drept intrare secvența $x(n)$ (figura 4.1).

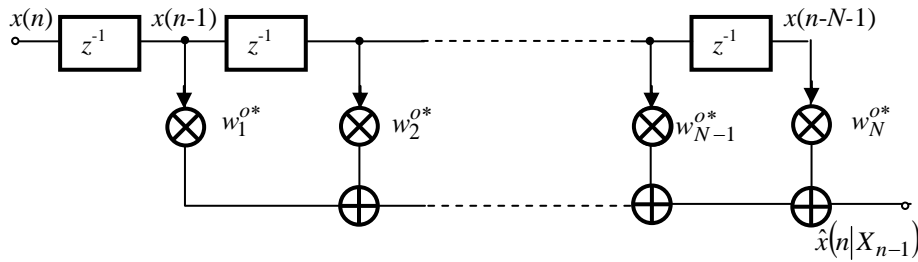


Fig. 4.1 Filtru ce realizează predicția directă

Eroarea de predicție poate fi și ea generată de un filtru, numit *filtrul erorii de predicție* conform relației:

$$e_N^f(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N w_k^{o*} x(n-k) = \sum_{k=0}^N a_{N,k} x(n-k) \quad (4.11)$$

unde

$$a_{N,k} \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -w_k^{o*}, & k = 1, \dots, N \end{cases} \quad (4.12)$$

El este reprezentat în figura 4.2.

Adăugând la ecuația Wiener-Hopf expresia puterii erorii, se obțin ecuațiile *Wiener-Hopf extinse* sub forma:

$$\begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

sau

$$\mathbf{R}_{N+1} \mathbf{a}_N^* = \begin{bmatrix} P_N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

unde

$$\mathbf{a}_N = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}^{o*} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

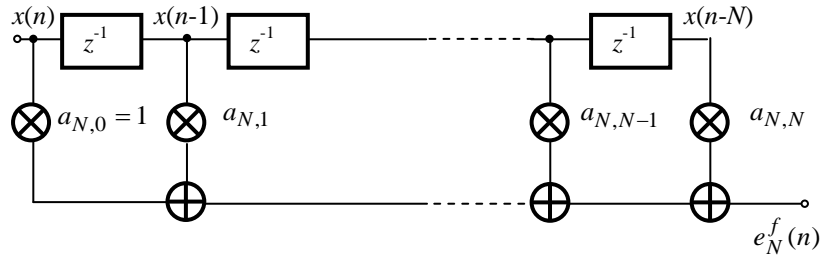
și \mathbf{R}_{N+1} este matricea de autocorelație extinsă, de dimensiuni $(N+1) \times (N+1)$,

Fig. 4.2 Filtrul erorii de predicție înainte

Aplicația 1

Să analizăm realizarea unui predictor pentru un proces autoregresiv AR(1) descris prin

$$x(n) = \alpha x(n-1) + v(n), \quad |\alpha| < 1$$

unde $v(n)$ este un zgomot alb cu valoare medie nulă și varianță σ_v^2 . Aplicând transformata Z

$$X(z) = \frac{V(z)}{1 - \alpha z^{-1}}; \quad P_{xx}(z) = P_{vv}(z) \frac{1}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha^* z)} = \frac{\sigma_v^2 z}{(z - \alpha)(1 - \alpha^* z)}$$

Efectuând transformata Z inversă se calculează funcția de autocorelație

$$r_{xx}(n) = \begin{cases} \sigma_v^2 \frac{\alpha^n}{1 - |\alpha|^2}, & n \geq 0 \\ r_{xx}^*(-n), & n < 0 \end{cases}$$

Să găsim un predictor de ordinul doi. Coeficienții optimi sunt soluțiile ecuației

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^o \\ w_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^* \\ (\alpha^*)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_1^o \\ w_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

deci

$$\hat{x}(n|X_{n-1}) = \alpha x(n-1)$$

așa încât predictorul optim este de fapt unul de ordinul 1, eșantionul $x(n-2)$ nefiind utilizat. Acest lucru era previzibil, având în vedere modul cum este definit procesul AR(1). Eroarea medie pătratică este

$$P_2 = \sigma_x^2 - \begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \alpha^* \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_v^2;$$

Să evaluăm puterea erorii raportată la puterea semnalului de intrare:

$$Q = \frac{P_2}{\sigma_x^2} = 1 - |\alpha|^2$$

Evident, puterea erorii de predicție este dată de puterea părții nepredictibile, $v(n)$. Raportul Q scade când $|\alpha| \rightarrow 1$, deoarece eșantioanele procesului sunt mai puternic corelate în acest caz. În cazul când $|\alpha| \rightarrow 0$, semnalul tinde către un zgomot alb, pentru care eșantioanele diferite sunt necorelate. Un asemenea proces este de aceea nepredictibil și în consecință puterea erorii tinde către puterea semnalului de intrare.

Aplicația 2. Predicția cu mai mulți pași.

Așa cum a fost prezentată până acum predicția, ea presupunea estimarea eșantionului $x(n)$ imediat următor setului de observații $\mathbf{x}(n-1)$. De aceea, o putem numi *predicție cu un pas*. Desigur, ne putem pune problema estimării eșantionului $x(n+p)$, pe baza aceluiași set de date. Semnalul dorit se va înlocui cu $x(n+p)$, iar valoarea estimată, reprezentând o *predicție cu $p+1$ pași*, este de forma

$$\hat{x}(n+p|X_{n-1}) = \sum_{k=1}^N w_k^* x(n-k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n-1)$$

Locul vectorului \mathbf{p} din ecuațiile Wiener-Hincin este luat de

$$\mathbf{r}_p = E\{\mathbf{x}(n-1)\mathbf{x}^*(n+p)\} = [r_{xx}(-1-p), r_{xx}(-2-p), \dots, r_{xx}(-N-p)]^T$$

și toate rezultatele obținute mai înainte se pot aplica și aici, deci

$$\mathbf{R}\mathbf{w}^{0(p)} = \mathbf{r}_p, \quad \mathbf{w}^{0(p)} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_p$$

$$P_N^{(p)} = \sigma_x^2 - \mathbf{r}_p^H \mathbf{w}^{0(p)} = r(0) - \mathbf{r}_p^H \mathbf{w}^{0(p)} = r(0) - \mathbf{r}_p^H \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_p$$

Ca exemplu, să reluăm cazul procesului AR(1) din aplicația precedentă. Se obțin:

$$\mathbf{r}_p = \frac{\sigma_v^2}{1-|\alpha|^2} \begin{bmatrix} (\alpha^*)^{p+1} & (\alpha^*)^{p+2} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} w_1^{o(p)} \\ w_2^{o(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha^*)^{p+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(n+p|X_{n-1}) = \alpha^{p+1} x(n-1)$$

$$P_2^{(p)} = \sigma_x^2 - \begin{bmatrix} \alpha^{p+1} & \alpha^{p+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha^*)^{p+1} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\sigma_v^2}{1-|\alpha|^2} = \sigma_v^2 \frac{1-|\alpha|^{2(p+1)}}{1-|\alpha|^2}; \quad Q = \frac{P_2^{(p)}}{\sigma_x^2} = 1 - |\alpha|^{2(p+1)}$$

Evident, cu cât p crește, eroarea predicției crește. Acest lucru este o consecință a faptului că funcția de autocorelație descrește monoton cu $|n|$.

4.2 Predicția înapoi (inversă)

Se poate pune și următoarea problemă: fiind cunoscute observațiile $x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)$ să estimăm valoarea eșantionului precedent acestui set de eșantioane, $x(n-N)$, în

aceleași condiții de minimizare a erorii pătratică medii. Este o problemă de predicție *înapoi* sau *inversă* (*backward prediction* în limba engleză).

Vom nota cu X_n spațiul N dimensional al observațiilor și vom căuta estimatul eșantionului $x(n-N)$ sub forma:

$$\hat{x}(n-N|X_n) = \sum_{k=1}^N g_k^* x(n-k+1)$$

Eroarea de predicție va fi:

$$e_N^b(n) = x(n-N) - \hat{x}(n-N|X_n) \quad (4.17)$$

Va trebui deci evaluat vectorul coeficienților

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T \quad (4.18)$$

astfel încât să fie minimizată eroarea pătratică medie

$$P_N = E\left\{\left|e_N^b(n)\right|^2\right\} \quad (4.19)$$

Teoria filtrării optimale se va putea aplica și aici, cu următoarele corespondențe:

$$\begin{aligned} d(n) &\Rightarrow x(n-N) \\ \mathbf{w}^o &\Rightarrow \mathbf{g}_o \\ e(n) &\Rightarrow e_N^b(n) \\ J_{\min} &\Rightarrow P_N \end{aligned} \quad (4.20)$$

În fine, locul vectorului \mathbf{p} este luat de

$$\mathbf{r}^{B*} = E\{\mathbf{x}(n)x^*(n-N)\} = [r_{xx}(N), r_{xx}(N-1), \dots, r_{xx}(1)]^T. \quad (4.21)$$

Rezultă imediat relațiile (ecuația normală și expresia puterii erorii de predicție)

$$\mathbf{R}\mathbf{g} = \mathbf{r}^{B*} \quad (4.22)$$

$$P_N = r(0) - \mathbf{r}^{BT} \mathbf{g} \quad (4.23)$$

precum și principiul ortogonalității

$$E\{\mathbf{x}(n)e_N^{b*}(n)\} = \mathbf{0}, \quad (4.24)$$

sau

$$E\{x(n-k)e_N^{b*}(n)\} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.25)$$

Și în acest caz predicția poate fi realizată cu un filtru RFI (figura 4.3).

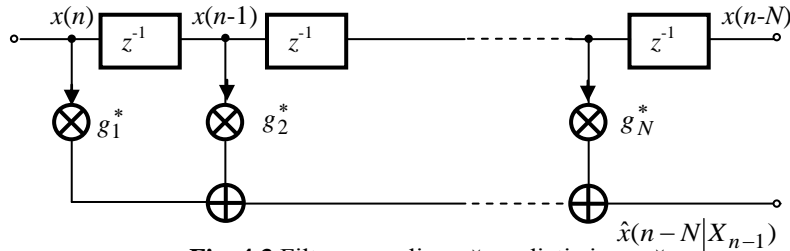


Fig. 4.3 Filtru ce realizează predicția inversă

Eroarea de predicție poate fi scrisă

$$e_N^b(n) = x(n-N) - \sum_{k=1}^N g_k^* x(n-k+1) = \sum_{k=0}^N c_{N,k} x(n-k) \quad (4.26)$$

unde

$$c_{N,k} = \begin{cases} -g_{k+1}^*, & k = 0, \dots, N-1 \\ 1, & k = N \end{cases} \quad (4.27)$$

Aceste operații pot fi realizate cu filtrul din figura 4.4, numit *filtrul erorii de predicție înapoi*.

Combinând relațiile de mai sus se obțin *ecuațiile Wiener-Hopf extinse pentru predicția inversă*,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r}^{B*} \\ \mathbf{r}^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{g} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ P_N \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

sau

$$\mathbf{R}_{N+1} \mathbf{c}_N^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ P_N \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

unde

$$\mathbf{c}_N = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

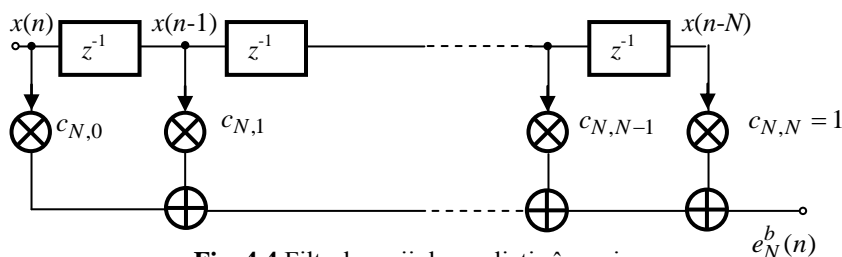


Fig. 4.4 Filtrul erorii de predicție înapoi

Se poate ușor stabili o relație între coeficienții filtrelor de predicție directă și inversă. Într-adevăr dacă în relația 4.22 se inversează ordinea liniilor, iar apoi se efectuează conjugarea complexă, rezultă succesiv:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{g}^B = \mathbf{r}^* ; \mathbf{R}^H \mathbf{g}^{B*} = \mathbf{r} ; \mathbf{R} \mathbf{g}^{B*} = \mathbf{r} \quad (4.31)$$

Comparând cu (4.8) rezultă:

$$\mathbf{g}^{B*} = \mathbf{w} \quad (4.32)$$

sau

$$g_k = w_{N-k+1}^*, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

și de asemenea

$$\mathbf{c}_N = \mathbf{a}_N^{B*} \quad (4.34)$$

sau

$$c_{N,k} = a_{N,N-k}^*, \quad k = 0, \dots, N \quad (4.35)$$

Se observă că filtrul erorii de predicție inversă se obține din cel al erorii de predicție directă, inversând ordinea multiplicatorilor și luând valorile complex conjugate ale coeficienților.

Deoarece:

$$\mathbf{r}^{BT} \mathbf{g} = \mathbf{r}^T \mathbf{g}^B = (\mathbf{r}^T \mathbf{g}^B)^* = \mathbf{r}^H \mathbf{g}^{B*} = \mathbf{r}^H \mathbf{w} \quad (4.36)$$

se constată că puterile erorilor de predicție sunt identice în cele două cazuri (motiv pentru care s-a folosit o notare unică, P_N).

4.3 Algoritmi eficienți pentru rezolvarea ecuației normale

4.3.1 Algoritmul Levinson-Durbin

După cum s-a văzut, pentru determinarea coeficienților w_k sau $a_{N,k}$, $k=1, \dots, N$ pentru predictorul optim ar trebui rezolvat sistemul de ecuații Wiener-Hopf. Sistemul este liniar și poate fi rezolvat prin metoda eliminărilor a lui Gauss, dar numărul de operații ar fi ridicat (crește cu N^3). Ținând seama de forma particulară a sistemului, determinată de caracteristicile prezentate mai înainte ale matricei \mathbf{R} , există un algoritm mai eficient, atât ca număr de operații, cât și ca spațiu de memorie necesar.

Vom căuta o constantă k_m , astfel încât să fie posibilă o relație de forma:

$$\mathbf{a}_m^* = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} + k_m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

sau în formă scalară

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a_{m-1,m-k}^*, \quad k = 0, \dots, m \quad (4.38)$$

În aceste ecuații $a_{m,k}$ reprezintă coeficientul k al filtrului erorii de predicție directă de ordinul m , deci

$$a_{m-1,0} = 1, \quad a_{m-1,m} = 0 \quad (4.39)$$

Pentru a determina coeficienții k_m vom înmulți relația (4.37) cu \mathbf{R}_{m+1} . Dar

$$\mathbf{R}_{m+1} \mathbf{a}_m^* = \begin{bmatrix} P_m \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

unde $\mathbf{0}_m$ este un vector nul de dimensiune $m \times 1$. S-a arătat că între \mathbf{R}_{m+1} și \mathbf{R}_m există relația:

$$\mathbf{R}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m & \mathbf{r}_m^{B*} \\ \mathbf{r}_m^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

unde \mathbf{R}_m este matricea de autocorelație de dimensiune $m \times m$, iar \mathbf{r}_m^{B*} este vectorul funcțiilor de corelație între elementele secvenței $x(n), x(n-1), \dots, x(n-m+1)$ și $x(n-m)$.

Prin înmulțirea primului termen din membrul drept al relației (4.37) cu \mathbf{R}_{m+1} se obține

$$\mathbf{R}_{m+1} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m & \mathbf{r}_m^{B*} \\ \mathbf{r}_m^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_m \mathbf{a}_{m-1}^* \\ \mathbf{r}_m^{BT} \mathbf{a}_{m-1}^* \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Definind scalarul:

$$\Delta_{m-1} = \mathbf{r}_m^{BT} \mathbf{a}_{m-1}^* = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k}^* r(k-m) \quad (4.43)$$

și având în vedere forma extinsă a ecuațiilor Wiener-Hopf pentru predictorul de ordin $m-1$,

$$\mathbf{R}_{m+1} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ \Delta_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

În mod asemănător, pentru al doilea termen din (4.37) :

$$\mathbf{R}_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}_m^H \\ \mathbf{r}_m & \mathbf{R}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_m^H \mathbf{a}_{m-1}^B \\ \mathbf{R}_m \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Ținând seama că:

$$\mathbf{r}_m^H \mathbf{a}_{m-1}^B = \Delta_{m-1}^*, \quad \mathbf{R}_m \mathbf{a}_{m-1}^B = \mathbf{R}_m \mathbf{c}_{m-1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

rezultă:

$$\mathbf{R}_{m+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{m-1}^* \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

și în final:

$$\begin{bmatrix} P_m \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ \Delta_{m-1} \end{bmatrix} + k_m^* \begin{bmatrix} \Delta_{m-1}^* \\ \mathbf{0}_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Din această relație se obțin imediat:

$$P_m = P_{m-1} + k_m^* \Delta_{m-1}^*; \quad 0 = \Delta_{m-1} + k_m^* P_{m-1} \quad (4.49)$$

Eliminând Δ_{m-1} , rezultă

$$P_m = P_{m-1} (1 - |k_m|^2) \quad (4.50)$$

Evident în relațiile de mai sus, $P_m \geq 0$, ceea ce implică $|k_m| \leq 1$. Pentru filtrul erorii de predicție de ordin 0,

$$e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n) \quad (4.51)$$

deci $P_0 = r(0)$ și se poate determina P_N cu

$$P_N = P_0 \prod_{m=1}^N (1 - |k_m|^2) \quad (4.52)$$

Formula de mai sus pune în evidență o tendință de scădere a puterii erorii de predicție odată cu creșterea ordinului predictorului.

Coefficienții k_m poartă numele de *coeficienți de reflexie* (prin analogie cu teoria liniilor de transmisiune). Din (4.38) pentru $k=m$,

$$k_m = a_{m,m} \quad (4.53)$$

Se poate ușor arăta, folosind definițiile și principiul ortogonalității, că:

$$\Delta_{m-1} = E\{e_{m-1}^b(n-1)e_{m-1}^{f*}(n)\} \quad (4.54)$$

unde $e_{m-1}^f(n)$ reprezintă răspunsul filtrului erorii de predicție directă de ordinul $m-1$, pentru secvența de intrare $x(n), x(n-1), \dots, x(n-m+1)$, iar $e_{m-1}^b(n-1)$ este răspunsul filtrului erorii de predicție inversă, de ordinul $m-1$, la secvența $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-m)$.

Având în vedere că:

$$e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n) \quad (4.55)$$

$$\Delta_0 = E\{e_0^b(n-1)e_0^{f*}(n)\} = E\{x(n-1)x^*(n)\} = r(-1) = r^*(1) \quad (4.56)$$

Cunoscând Δ_0 și P_0 se pot calcula, folosind relațiile de recurență (4.49),

$$k_1 = -\frac{\Delta_0^*}{P_0} = -\frac{r(1)}{r(0)}; \quad P_1 = r(0) - \frac{|r(1)|^2}{r(0)} \quad (4.57)$$

și așa mai departe, până la k_N și P_N . Coeficienții Δ_{m-1} se calculează cu ajutorul formulelor de definiție și utilizând formulele de recurență se pot calcula succesiv $P_m, k_m, a_{N,k}$, pornind de la $k=0$.

Algoritmul poate fi sintetizat sub forma următoare:

Algoritmul Levinson-Durbin

$P_0 = r(0); \Delta_0 = r^*(1)$
 for $m = 1 : 1 : N$

$k_m = -\frac{\Delta_{m-1}^*}{P_{m-1}}$

$P_m = P_{m-1}(1 - |k_m|^2)$

$a_{m,m} = k_m, \quad a_{m,0} = 1$

for $k = 1 : 1 : m-1$

$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a_{m-1,m-k}^*$

end

$\Delta_m = \sum_{k=0}^m a_{m,k}^* r(k-m-1)$

end

Complexitatea aritmetică a algoritmului

Se observă ușor că în pasul m al algoritmului trebuie efectuate:

- împărțire;

- $2m+1$ înmulțiri (două pentru calculul lui P_m , $m-1$ pentru reactualizarea coeficienților $a_{m,k}$, și m pentru calculul lui Δ_m).
- $2m$ adunări.

Pentru efectuarea întregului algoritm, rezultă

$$\sum_{m=1}^N (2m+2) = N^2 + 3N$$

înmulțiri / împărțiri și

$$\sum_{m=1}^N (2m) = N^2 + N$$

adunări. Dacă se utilizează o singură unitate aritmetică și aceasta efectuează o operație aritmetică într-o unitate de timp, rezultă că timpul total de calcul este proporțional cu N^2 .

Odată cu dezvoltarea tehnologiilor VLSI și a arhitecturilor paralele de prelucrare capătă importanță și analiza cazului când se dispune de N unități aritmetice ce pot lucra în paralel. S-ar putea presupune că în acest caz, timpul total necesar ar fi proporțional cu N . În realitate, în calculul produsului scalar pentru evaluarea lui Δ_m , se pot efectua în paralel produsele, dar nu și sumele. Dacă $N = 2^r$, calculul sumelor se poate face în r etape, așa încât va fi necesar un număr de unități de timp proporțional cu $N \log_2 N$.

Exemplu

Cu ajutorul algoritmului Levinson-Durbin să determinăm coeficienții unui predictor de ordinul 3, cunoscând secvența funcției de autocorelație $[1, 0,5, 0,5, 0,25]$.

Ecuția normală este:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

Pentru predictorul de ordinul 1

$$P_0 = r_{xx}(0) = 1; \quad \Delta_0 = r_{xx}(1) = 0,5$$

$$k_1 = -\frac{\Delta_0}{P_0} = -\frac{1}{2}; \quad P_1 = P_0(1 - k_1^2) = \frac{3}{4}$$

$$a_{1,0} = 1; \quad a_{1,1} = k_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta_1 = a_{1,0}r(-2) + a_{1,1}r(-1) = \frac{1}{4}$$

Pentru predictorul de ordinul doi:

$$k_2 = -\frac{\Delta_1}{P_1} = -\frac{1}{3}; \quad P_2 = P_1(1 - k_2^2) = \frac{2}{3}$$

$$a_{2,0} = 1; \quad a_{2,1} = a_{1,1} + k_2 a_{1,1} = -\frac{1}{3}; \quad a_{2,2} = k_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Delta_2 = a_{2,0}r(-3) + a_{2,1}r(-2) + a_{2,2}r(-1) = -\frac{1}{12}$$

În fine, pentru modelul de ordinul trei

$$k_3 = -\frac{\Delta_2}{P_2} = \frac{1}{8}; \quad P_3 = P_2(1 - k_3^2) = \frac{21}{32}$$

$$a_{3,0} = 1; \quad a_{3,1} = a_{2,1} + k_3 a_{2,2} = -\frac{3}{8}; \quad a_{3,2} = a_{2,2} + k_3 a_{2,1} = -\frac{3}{8}; \quad a_{3,3} = k_3 = \frac{1}{8}$$

4.3.2 Algoritmul Schur

Algoritmul Levinson-Durbin permite atât calculul coeficienților a_k cât și al coeficienților de reflexie. Dacă ne interesează numai coeficienții de reflexie algoritmul Schur poate oferi o soluție mai eficientă [Pr1],[St1]. Vom defini secvența

$$y_m^f(i) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} r_{xx}(i-k) = a_{m,i} * r_{xx}(i) \quad (4.58)$$

care reprezintă răspunsul filtrului erorii de predicție directă la secvența de autocorelație. Având însă în vedere că ecuația Wiener_Hopf pentru predictorul de ordin m se poate exprima sub formele

$$\sum_{k=1}^m a_{m,k} r_{xx}(i-k) = -r_{xx}(i), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.59)$$

$$\sum_{k=0}^m a_{m,k} r_{xx}(i-k) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.60)$$

rezultă că

$$y_m^f(i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.61)$$

și

$$P_m = \sum_{k=0}^m a_{m,k} r_{xx}(k) = y_m^f(0) \quad (4.62)$$

În mod asemănător, se definesc, pornind de la predicția inversă

$$y_m^b(i) = \sum_{k=0}^m c_{m,k} r_{xx}(i-k) = c_{m,i} * r_{xx}(i) \quad (4.63)$$

Dar

$$c_{m,k} = a_{m,m-k}^* \quad (4.64)$$

așa încât se deduce ușor că

$$y_m^b(i) = y_m^{f*}(m-i) \quad (4.65)$$

Ca urmare rezultă proprietățile

$$y_m^b(i) = 0, \quad i = 0, \dots, m-1 \quad (4.66)$$

$$y_m^b(m) = P_m \quad (4.67)$$

Ținând seama de relațiile de recurență

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a_{m-1,m-k}^* = a_{m-1,k} + k_m c_{m-1,k-1} \quad (4.68)$$

$$c_{m,k} = k_m^* a_{m-1,k} + c_{m-1,k-1} \quad (4.69)$$

se obțin imediat niște relații de recurență asemănătoare pentru secvențele nou introduse:

$$y_m^f(i) = y_{m-1}^f(i) + k_m y_{m-1}^b(i-1) \quad (4.70)$$

$$y_m^b(i) = k_m^* y_{m-1}^f(i) + y_{m-1}^b(i-1) \quad (4.71)$$

cu condițiile inițiale

$$y_0^f(i) = y_0^b(i) = r_{xx}(i) \quad (4.72)$$

În fine

$$y_m^f(m) = 0 \Rightarrow y_{m-1}^f(m) + k_m y_{m-1}^b(m-1) = 0 \quad (4.73)$$

de unde

$$k_m = -\frac{y_{m-1}^f(m)}{y_{m-1}^b(m-1)} \quad (4.74)$$

Pe baza relațiilor deduse, se poate construi un algoritm recursiv (algoritmul Schur) care permite calculul coeficienților de reflexie, pornind de la funcțiile de autocorelație.

ALGORITMUL SCHUR

```

for k = 0 : N
    y_0^f(k) = y_0^b(k) = r_xx(k)
end
for m = 1 : N
    k_m = - y_{m-1}^f(m) / y_{m-1}^b(m-1)
    for i = m + 1 : N
        y_m^f(i) = y_{m-1}^f(i) + k_m y_{m-1}^b(i-1)
    end
    for i = m : N
        y_m^b(i) = k_m^* y_{m-1}^f(i) + y_{m-1}^b(i-1)
    end
end
P_N = y_N^b(N)

```

Complexitatea aritmetică a algoritmului.

În pasul m se efectuează:

- o împărțire, pentru calculul lui k_m ;
- $N-m$ înmulțiri și $N-m$ adunări, în primul ciclu după i ;
- $N-m+1$ înmulțiri și $N-m+1$ adunări, în al doilea ciclu după i .

Rezultă un număr de $2N-2m+2$ înmulțiri / împărțiri și $2N-2m+1$ adunări, deci în total

$$\sum_{m=1}^N (2N - 2m + 2) = N^2 + N \quad (4.75)$$

înmulțiri / împărțiri și

$$\sum_{m=1}^N (2N - 2m + 1) = N^2 \quad (4.76)$$

adunări.

Practic, algoritmul poate fi organizat în modul următor:

- Inițializarea algoritmului. Se constituie “matricea generatoare”

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \dots & r_{xx}(N) \\ r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \dots & r_{xx}(N) \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

- Prin deplasarea spre dreapta cu o unitate a liniei a doua se obține

$$\mathbf{G}'_0 = \begin{bmatrix} 0 & r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \dots & r_{xx}(N) \\ 0 & r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Raportul elementelor coloanei a doua, cu semnul schimbat, determină primul coeficient de reflexie, k_1 .

- Se constituie matricea

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ k_1^* & 1 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

- Se calculează

$$\mathbf{G}'_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{G}'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_1^f(2) & \dots & y_1^f(N) \\ 0 & y_1^b(1) & y_1^b(2) & \dots & y_1^b(N) \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

unde s-au avut în vedere relațiile de recurență și faptul că $y_1^f(1) = 0$. În continuare se repetă ultimele trei operații, deci în pasul m :

- Se formează \mathbf{G}'_m din \mathbf{G}_m prin deplasarea spre dreapta cu o poziție a liniei a doua.
- Se calculează k_{m+1} ca raport cu semnul schimbat a elementelor coloanei $m+2$ și se formează matricea \mathbf{K}_{m+1} .
- Se calculează

$$\mathbf{G}_{m+1} = \mathbf{K}_{m+1} \mathbf{G}'_m \quad (4.81)$$

Exemplu

Să determinăm coeficienții de reflexie pentru un predictor de ordinul 3, cunoscând secvența funcției de autocorelație [1, 0,5, 0,5, 0,25].

Se formează succesiv:

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

și rezultă

$$k_1 = -\frac{0,5}{1} = -0,5$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Se formează matricele pentru $m=1$;

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{G}'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,25 & 0,475 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = -\frac{0,25}{0,75} = -\frac{1}{3}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Pentru $m=2$,

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{G}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$k_3 = -\frac{-\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{8}$$

VARIANTĂ PARALEL DE IMPLEMENTARE A ALGORITMULUI SCHUR

Un avantaj al algoritmului Schur constă în faptul că permite o implementare paralel (pipeline), sugerată de altfel, de modul de calcul prezentat mai sus. O asemenea realizare, propusă de Kung și Hu [Ku1] este prezentată în figura 4.5. Celulele F2-FN și B1-BN au structuri identice, reprezentate în figura 4.6a. În această schemă, D este un registru de stocare, în care se

salvează rezultatul pe un tact comun pentru întreaga structură. Comutatorul COM este pe poziția 1 numai în primul tact, permițând încărcarea celulelor cu valorile funcțiilor de autocorelație în etapa de inițializare; în rest el se află pe poziția 2.

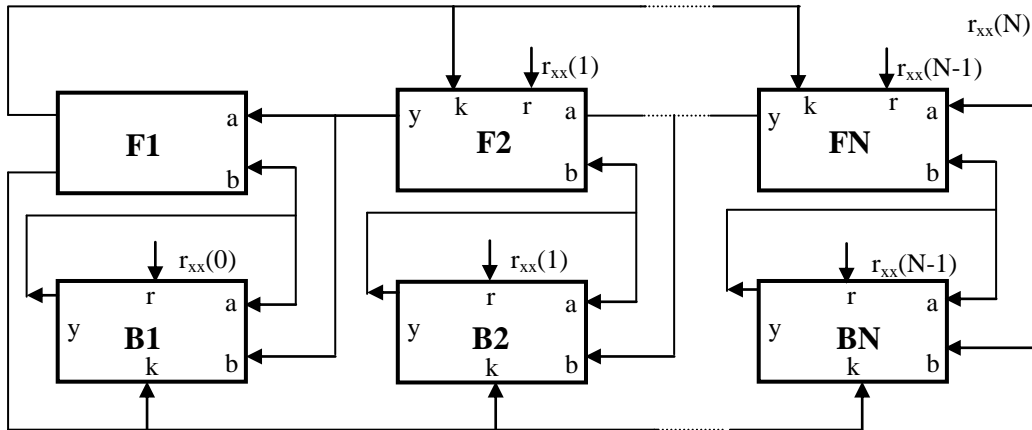


Fig. 4.5 Structură pipe-line pentru implementarea algoritmului Schur

Celula F1 are o structură specifică (celulă de divizare), reprezentată în figura 4.6b, și nu dispune de elemente de memorie. Ea este de fapt cea care generează valorile lui k (ieșirea algoritmului).

Din analiza anterioară făcută asupra complexității aritmetice, rezultă că dacă se folosește o singură unitate aritmetică și pentru fiecare operație aritmetică este necesară o unitate de timp, timpul total necesar efectuării algoritmului este proporțional cu N^2 .

În cazul structurii prezentate acum, care conține $2N$ unități aritmetice, efectuarea tuturor calculelor se face în N tacte. În fiecare tact vor trebui calculate o înmulțire, o adunare și o împărțire (în celula divizoare). În ipoteza făcută mai înainte, perioada tactului ar trebui să fie de trei unități de timp, deci în total vor fi necesare $3N$ unități de timp. Posibilitatea de calcul într-o structură paralel reprezintă un avantaj al algoritmului Schur față de algoritmul Levinson-Durbin.

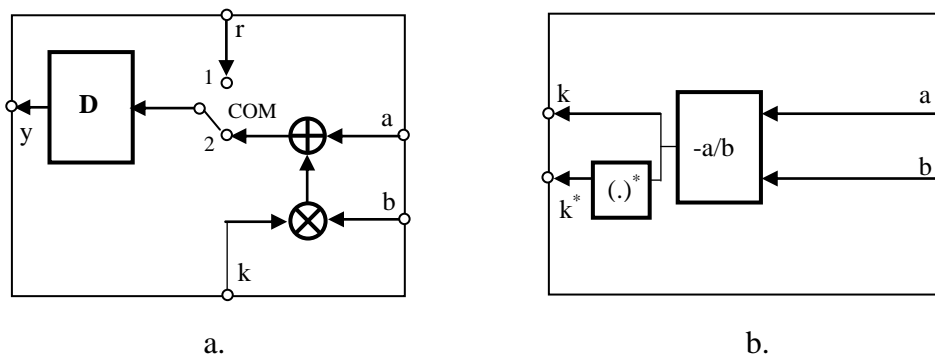


Fig. 4.6 Celulele structurii ce implementează algoritmul Schur

4.4 Filtrul erorii de predicție

4.4.1 Proprietăți ale filtrelor erorii de predicție

Vom nota funcțiile de transfer ale filtrelor erorii de predicție directă și inversă de ordinul m cu:

$$H_m^f(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} z^{-k}; \quad H_m^b(z) = \sum_{k=0}^m c_{m,k} z^{-k} = \sum_{k=0}^m a_{m,m-k}^* z^{-k} \quad (4.82)$$

1) Între funcțiile de transfer ale celor două filtre există relația

$$H_m^b(z) = z^{-m} H_m^{f*} \left(\frac{1}{z} \right) \quad (4.83)$$

ce rezultă imediat din definițiile de mai sus.

2) *Caracteristicile amplitudine-frecvență* ale celor două filtre sunt identice.

Într-adevăr, punând în relația de mai sus $z=e^{j\omega}$,

$$H_m^b(e^{j\omega}) = e^{-jm\omega} H_m^{f*}(e^{j\omega}) \Rightarrow |H_m^b(e^{j\omega})| = |H_m^f(e^{j\omega})| \quad (4.84)$$

3) *Relație de recurență*. Având în vedere formulele (4.38) rezultă:

$$H_m^f(z) = H_{m-1}^f(z) + k_m z^{-1} H_{m-1}^b(z) \quad (4.85)$$

4) Filtrul erorii de predicție directă este de *fază minimă*. Pentru demonstrație vom avea în vedere faptul că $|k_m| < 1$, ceea ce, ținând seama și de proprietatea 2 conduce la:

$$|k_m z^{-1} H_{m-1}^b(z)| < |H_{m-1}^b(z)| = |H_{m-1}^f(z)| \quad \text{pe } |z|=1 \quad (4.86)$$

Vom folosi *teorema lui Rouché* din teoria funcțiilor de variabilă complexă [Ha1],[St1]:

Dacă două funcții $F(z)$, $G(z)$, sunt analitice pe conturul C din planul z și în interiorul conturului, și $|G(z)| < |F(z)|$ pe contur, atunci funcția $F(z)+G(z)$ are același număr de zerouri în interiorul conturului C ca și $F(z)$.

Fie conturul C cercul $|z|=1$ și vom aplica teorema aceasta pentru funcțiile:

$$F(z) = H_{m-1}^f(z), \quad G(z) = k_m z^{-1} H_{m-1}^b(z) \quad (4.87).$$

Dacă s-ar parcurge conturul C în sens direct trigonometric, prin interiorul său s-ar înțelege domeniul $|z| < 1$. Inversând sensul de parcurgere, interiorul conturului devine domeniul $|z| > 1$. Conform teoremei enunțate, dacă $H_{m-1}^f(z)$ nu are zerouri în $|z| > 1$, de aceeași proprietate se bucură și $H_m^f(z)$. Cum $H_0^f(z) = 1$, rezultă prin inducție completă că $H_m^f(z)$ nu are zerouri în afara cercului $|z|=1$.

5) Filtrul erorii de predicție inversă este de *fază maximă* (are toate zerourile în exteriorul cercului $|z|=1$).

Dacă se exprimă $H_m^f(z)$ sub forma

$$H_m^f(z) = \prod_{i=1}^m (1 - z_i z^{-1}), \quad |z_i| < 1 \quad (4.88)$$

având în vedere proprietatea 1, rezultă

$$H_m^b(z) = z^{-m} \prod_{i=1}^m (1 - z_i^* z) = \prod_{i=1}^m (z^{-1} - z_i^*) \quad (4.89)$$

Nulurile acestei funcții de transfer sunt de forma $1/z_i^*$, $i=1, \dots, m$, și sunt evident situate în $|z| > 1$, simetric față de z_i în raport cu cercul $|z| = 1$.

4.4.2 Forma "lattice" de realizare a filtrului erorii de predicție

Am văzut că o formă posibilă de realizare a filtrului erorii de predicție este aceea de filtru transversal. În cele ce urmează vom prezenta o altă structură, care poate genera atât eroarea de predicție directă cât și inversă. Pentru a găsi această structură vom deduce mai întâi niște relații de recurență pentru eroarea de predicție. Utilizând ecuația (4.37) se poate scrie succesiv:

$$\begin{aligned} e_m^f(n) &= \mathbf{a}_m^T \mathbf{x}_{m+1}(n) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + k_m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^{B*} \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{x}_{m+1}(n) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1}^T, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(n) \\ x(n-m) \end{bmatrix} + k_m \begin{bmatrix} 0, \mathbf{a}_{m-1}^{BH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ \mathbf{x}_m(n-1) \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{a}_{m-1}^T \mathbf{x}_m(n) + k_m \mathbf{a}_{m-1}^{BH} \mathbf{x}_m(n-1) \end{aligned} \quad (4.90)$$

În relațiile de mai sus s-a utilizat pentru vectorul $\mathbf{x}[n]$ și un indice inferior, ce reprezintă numărul de componente al vectorului.

Având în vedere că

$$\mathbf{a}_{m-1}^{BH} \mathbf{x}_m(n-1) = \mathbf{c}_{m-1}^T \mathbf{x}_m(n-1) = e_{m-1}^b(n-1) \quad (4.91)$$

reprezintă eroarea predicției inverse, întârziată cu un tact, rezultă:

$$e_m^f(n) = e_{m-1}^f(n) + k_m e_{m-1}^b(n-1) \quad (4.92)$$

Făcând o inversare a ordinii și o conjugare complexă a elementelor din relația (4.37) și procedând apoi ca mai înainte se găsește:

$$e_m^b(n) = e_{m-1}^b(n-1) + k_m^* e_{m-1}^f(n-1) \quad (4.93)$$

Într-o formă matriceală cele două ecuații se pot scrie:

$$\begin{bmatrix} e_m^f(n) \\ e_m^b(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_m \\ k_m^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{m-1}^f(n) \\ e_{m-1}^b(n-1) \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Relația de mai sus corespunde cuadripolului din figura 4.7.

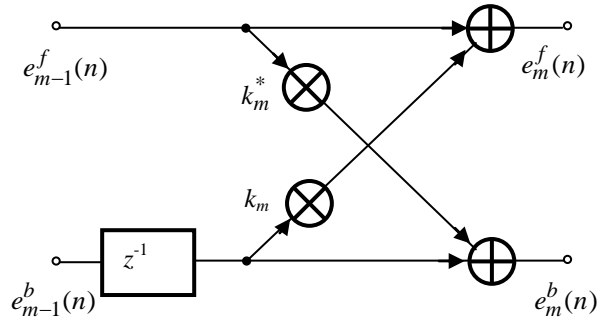


Fig. 4.7 Celula elementară a structurii latice

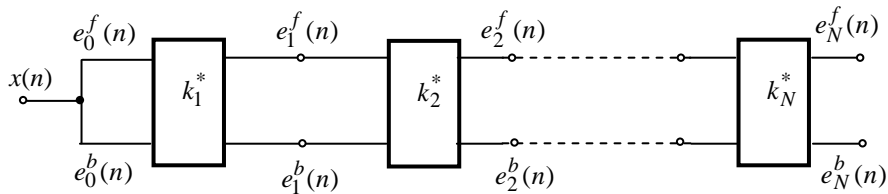


Fig. 4.8 Structura latice

Având în vedere că $e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n)$ reprezintă intrarea filtrului, rezultă că în ansamblu, acesta se va obține prin conectarea în cascadă a N asemenea cuadripoli (figura 4.8).

Se poate pune problema calculului coeficienților k_k , cunoscând $a_{N,1}, \dots, a_{N,N}$. Pentru aceasta vom porni de la ecuația:

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + k_m a_{m-1,m-k}^*, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (4.95)$$

căreia îi vom alătura ecuația obținută din aceasta prin conjugare complexă și înlocuind k cu $m-k$. Rezultă sistemul:

$$\begin{aligned} a_{m,k} &= a_{m-1,k} + k_m a_{m-1,m-k}^* \\ a_{m,m-k}^* &= k_m^* a_{m-1,k} + a_{m-1,m-k} \end{aligned} \quad (4.96)$$

din care se calculează $a_{m-1,k}$,

$$a_{m-1,k} = \frac{a_{m,k} - k_m a_{m,m-k}^*}{1 - |k_m|^2} = \frac{a_{m,k} - a_{m,m} a_{m,m-k}^*}{1 - |a_{m,m}|^2} \quad (4.97)$$

Cunoscând setul de coeficienți corespunzători predictorului de ordin N , $\{a_{N,k}\}$, se trece, cu formula de mai sus, la cei corespunzători predictorului de ordin $N-1$, $\{a_{N-1,k}\}$ și se determină $k_{m-1} = a_{m-1,m-1}$, și așa mai departe până la $N=1$.

O proprietate remarcabilă a structurii latice este aceea că se poate mări ordinul predictorului, adăugând pur și simplu încă o celulă, fără a modifica în rest structura existentă. Faptul că toate celulele au aceeași structură este favorabil din punctul de vedere al posibilităților de integrare pe scară foarte largă.

Bibliografie

- [Al1] **Alexander S.T.**, *Adaptive Signal Processing*, Springer, New York, 1986.
- [B1] **Bellanger M.G.**, *Adaptive Digital Filters and Signal Analysis*, M. Dekker, New York, 1987.
- [Ci1] **Ciochină S.**, *Sisteme adaptive*, UPB, 1997.
- [Ha1] **Hayes M.H.**, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley and Sons, 1966.
- [Ha2] **Haykin S.**, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [Ho1] **Honig M.L.**, **Messerschmitt D.G.**, *Adaptive Filters*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [Ku1] **Kung S.Y.**, **Hu Y.H.**, A highly concurrent algorithm and pipelined architecture for solving Toeplitz systems, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Sig. Proc.*, vol. **ASSP-31**, pp. 66-76, 1983.
- [Pr1] **Proakis J.G.**, **Manolakis D.G.**, *Digital Signal Processing*, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.
- [Pr2] **Proakis J.G.**, **Rader C.M.**, **Ling F.**, **Nikias C.L.**, *Advanced Digital Signal Processing Algorithms*, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [St1] **Stanomir D.**, **Negrescu C.**, **Jalbă L.**, *Algoritmi pentru prelucrarea semnalului vocal. Teorie și aplicații în comunicații GSM*, Ed. Athena, 1998.
- [Tr1] **Treichler J.**, **Johnson C.R.**, **Larimore M.G.**, *Theory and Design of Adaptive Filters*, Wiley, New York, 1987.
- [W1] **Widrow B.**, **Stearns S.D.**, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985